



## **MODUL : Metode Elemen Hingga**

**UNIVERSITAS HARAPAN MEDAN**  
**Fakultas Teknik dan Komputer**  
**2021**

## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillah Modul Mata kuliah Metode Elemen Hingga ( 21-3-09-4-6-13-3 ) ini berhasil disusun dengan semaksimal mungkin. Modul ini disusun mengacu pada silabus mata kuliah yang diberlakukan untuk program S1 yang disajikan pada tiap semester dengan jumlah SKS 3 ( Tiga ). Modul ini diterbitkan untuk kalangan sendiri pada Program Studi Teknik Mesin FAKULTAS TEKNIK DAN KOMPUTER UNIVERSITAS HARAPAN MEDAN .Penulis mengucapkan terimakasih atas suport dan masukan yang diberikan teman teman Dosen di Fakultas Teknik dan Komputer Universitas Harapan Medan, selama penyusunan Modul ini.

Modul mata kuliah Metode Elemen Hingga ini diharapkan bisa membantu mahasiswa dalam memahami materi yang disampaikan Dosen. Dalam diktat ini menyajikan bermacam-macam contoh soal dan latihan soal dalam setiap BAB, yang mana mahasiswa diharapkan bisa memanfaatkan dengan baik untuk memperkuat pemahaman materi setiap BAB. Namun demikian, mahasiswa sebaiknya juga membaca buku-buku referensi yang lain tentang Metode Elemen Hingga ini sehingga diperoleh informasi yang lebih lengkap dalam upaya memahami materi perkuliahan.

Bagaimanapun, diktat ini masih diperlukan perbaikan secara bertahap, oleh karena itu mohon kritik dan saran untuk kesempurnaan Modul ini.

Kami menyampaikan terimakasih kepada semua pihak yang membantu penulisan diktat ini. Semoga bermanfaat bagi pembaca.

Medan, Januari 2021

Penulis

( Ir.Junaidi,M.M.,M.T. )

NIDN :0103036301

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b> .....	2
<b>DAFTAR ISI</b> .....	3
<b>BAB I PENGENALAN METODE ELEMEN HINGGA (MEH)</b> .....	4
1.1. Matriks Review .....	4
1.2. Apa Dan Mengapa : Metode Elemen Hingga.....	11
1.3. Langkah-Langkah Penerapan Metode Elemen Hingga .....	13
1.4. Perkembangan Metode Elemen Hingga .....	15
1.5. Contoh-Contoh Aplikasi Metode Elemen Hingga.....	16
<b>BAB II ANALISIS RANGKA BATANG (TRUSS)</b> .....	20
2.1. Pendahuluan .....	20
2.2. Elemen Truss Satu Dimensi .....	22
2.3. Elemen Truss Dua Dimensi.....	29
2.4. Elemen Truss Tiga Dimensi .....	34
2.5. Contoh Soal .....	35
2.6. Program Matlab Untuk Analisis Truss 3-Dimensi .....	39
<b>BAB III PERPINDAHAN PANAS</b> .....	48
4.1. Formulasi Perpindahan Panas Konduksi Satu Dimensi .....	48
4.2. Formulasi Perpindahan Panas konduksi (non-konveksi) dua dimensi ...	51
4.3. Perpindahan Panas dengan Konveksi .....	52
4.4. Konduktifitas Termal dan Koefisien Konveksi .....	54
4.5. Formulasi Elemen Hingga 1D Menggunakan Metode Variasi .....	55
4.6. Contoh Soal .....	62
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	67

# BAB I PENGENALAN

## METODE ELEMEN HINGGA (MEH)

### 1.1. Matriks Review

#### 1.1.1. Istilah Matriks

Di dalam mencari hubungan antara variable-variabel baik dalam ilmu terapan atau ilmu lainnya sering harus dipecahkan suatu persoalan yang terdiri lebih dari dua persamaan. Dengan menggunakan matriks persoalan tersebut dapat lebih mudah dalam analisis-analisisnya yang mencakup hubungan antar variable- variabel.

Matriks adalah sebuah susunan bilangan yang disebut -elemen|| yang disusun menurut baris dan kolomnya berbentuk persegi panjang. simbol yanf sering digunakan dalam penulisan matriks misalnya - $A_{mn}$ || artinya sebua matriks - $A$ || dengan jumlah baris - $m$ || dan jumlah kolom - $n$ ||, sering dibaca matriks - $A$ || - $m$  dikali  $n$ ||. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut *elemen* dari matriks. Entri di baris - $i$ || dan kolom - $j$ || dinotasikan dengan  $a_{ij}$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*Square Matrix* adalah jika nilai  $m$  dan  $n$  adalah sama, matriks yang terdiri dari baris dan kolom di notasikan dengan tanda kurung siku ( $[]$ ) sedangkan matriks yang terdiri hanya kolom dinotasikan dengan tanda kurung kurawa ( $\{\}$ ).

$$a = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad a = [ 2 \quad 3 \quad 4 ] \quad a = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$$

### 1.1.2. Perkalian Matriks dan Scalar

Jika ada matriks  $-c||$  dikalikan dengan sekalar  $-k||$ , maka matriks baru yang didapat adalah masing-masing komponen dalam matriks  $-c||$  dikalikan dengan scalar tersebut. Contoh

:

$$a = \begin{matrix} * 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} \quad k = 4$$

Maka :

$$ka = \begin{matrix} 4 * 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} = \begin{matrix} * 8 & -4 \\ 12 & -8 \end{matrix}$$

### 1.1.3. Penjumlahan Matriks

Matriks dapat dilakukan dengan syarat matriks tersebut mempunyai orde yang sama, hal ini juga berlaku untuk pengurangan matriks. Penjumlahannya dilakukan dengan cara menjumlahkan komponen-komponen yang seletak (korespondensi). Pada penjumlahan bersifat komutatif (commutative law).

$$a = \begin{matrix} * 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} \quad b = \begin{matrix} * 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

Maka :  $c = a + b = b + a$

$$c = \begin{matrix} * 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} + \begin{matrix} * 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix} = \begin{matrix} * 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix} + \begin{matrix} * 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} = \begin{matrix} * 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{matrix}$$

### 1.1.4. Perkalian Matriks

Perkalian matriks dapat dilakukan dengan syarat jumlah kolom matriks pertama dan jumlah baris matriks kedua adalah sama. Jika ada matriks  $\underline{a}$  dan matriks  $\underline{b}$  maka perkalian keduanya  $\underline{c} = \underline{ab}$  adalah

$$[c_{ij}] = \sum_{e=1}^n a_{ie} b_{ej}$$

Dimana  $n$  adalah jumlah kolom  $\underline{a}$  atau jumlah baris  $\underline{b}$  maka ketikadikalikan akan dengan cara :

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Contoh, apabila ada 2 buah matriks  $\underline{a}$  dan  $\underline{b}$  maka perkalian keduanya adalah

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ab} = \begin{bmatrix} 2(1) + (-1)(2) & 2(-1) + (-1)(-3) \\ 3(1) + (-2)(2) & 3(-1) + (-2)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ingat dalam perkalian matrik tidak bersifat komutatif yang artinya jika matriks  $\underline{a}$  dan matrik  $\underline{b}$  dikalikan tidak sama dengan matriks  $\underline{b}$  dikalikan  $\underline{a}$
- Pastikan bahwa perkaliannya sudah benar dengan mendapatkan hasil yang sesuai seperti rumusan

$$\begin{matrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ (i \times e) & (e \times i) & = (i \times j) \end{matrix}$$

### 1.1.5. Transpos, Simetris, dan Identitas Matriks

Transpose matriks sangat sering digunakan pada metode elemen hingga sehingga hal ini sangat perlu diketahui. Notasi dari transpos matriks adalah dengan adanya *superscript T* pada penulisan matriks contoh  $\underline{a}^T$ . cara mentranspos matriks adalah dengan menukar komponen kolom matrik menjadi komponen barismatriks. Contoh :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & \end{bmatrix} \text{ maka matriks transposnya } \underline{a}^{-15} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Apabila ada perkalian matriks yang kemudian ditranspos maka akan sama hasilnya dengan masing-masing ditranspose dulu kemudian baru dikalikan  $(\underline{ab})^T = \underline{a}^T \underline{b}^T$  contohnya :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a} \underline{b})^T = [17 \quad 39] \text{ sedangkan, } \underline{a}^T \underline{b}^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = [17 \quad 39]$$

Apabila ada matriks yang ditranspos namun hasilnya sama dengan sebelum ditranspos maka disebut dengan *simetris matriks*. dan *identitas matriks* disimbolkan "I" adalah matriks yang main digonalnya adalah angka satu dan selainnya nol. Apabila identitas matriks dikalikan dengan matriks  $\underline{a}$  maka hasil yang didapat tetap matriks  $\underline{a}$ . Contohnya masing-masing

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underline{a}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.1.6. Differensial dan Integral matriks Matrix

Operasi differensial matriks dapat dilakukan dengan mendifferensialkan setiap elemen dalam matriks, contohnya:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} x^3 & 2x^2 & 3x \\ 2x^2 & x^4 & x \\ 3x & x & x^5 \end{bmatrix} \text{ jika matriks } a \text{ diferensialkan terhadap } x (da/dx), \text{ maka:}$$

$$\frac{da}{dx} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 4x & 3 \\ 4x & 4x^3 & 1 \\ 3 & 1 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

Bagaimana dengan differensial parsial dan integral?, maka sama seperti differensial diatas yaitu dilakukan pada setiap elemen di dalam matriks.

### 1.1.7. Invers Matriks 2x2

Invers matrik dapat dinyatakan dengan rumusan dibawah ini, Dimanasimbol  $--1||$  adalah invers matriks. invers matriks hanya dapat dilakukan pada matriks persegi, misalkan matriks 3x3, 4x4, dst.

$$\underline{a}^{-1}\underline{a} = \underline{a}\underline{a}^{-1} = I$$

Invers matriks pada matriks 2x2 dapat dilakukan dengan menentukandeterminan matriks terlebih dahulu, contohnya:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \text{tentukan invers matriksnya!}$$

$$\text{Jika matriks } \underline{a} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ maka : } \underline{a}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{-1} = \frac{1}{3(2) - 5(1)} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ coba kita buktikan:}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

### 1.1.8. Invers Matriks Metode Kofaktor

Metode kofaktor ini cocok untuk pengerjaan manual matriks 4x4 atau kurang dari itu. Syaratnya adalah matriks harus berupa square matriks. langkah awak kita harus menemukan kofaktor dari matriks kemudian menghitung determinan dari matriks tersebut. Apabila terdapat sebuah matriks  $\underline{a}$ , maka

$$\underline{a}^{-1} = \frac{\underline{C}^T}{|\underline{a}|}$$

Dimana  $\underline{a}^{-1}$  adalah invers matriks dan  $\underline{C}$  adalah matriks hasil dari kofaktordan  $|\underline{a}|$  adalah determinan matriks. untuk lebih memudahkan kita ambil contoh sebagai berikut:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Kofaktor yang kita dapat dari matriks  $\underline{a}$  adalah  $C_{ij} = (-1)^{i+j}|\underline{d}|$  dimana  $i$  dan  $j$  adalah baris dan kolom yang harus dihilangkan sedangkan  $|\underline{d}|$  adalah matriks yang tersisa setelah dihilangkan baris dan kolomnya. Maka kita mendapatkan:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 & C_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -11 \\
 C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 & C_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \\
 C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 & C_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \\
 C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2 & C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \\
 C_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

Kemudian kita akan mendapatkan matriks  $\underline{C}$  adalah

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -12 & -2 & 8 \\ -11 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan determinan dari matriks  $|\underline{a}|$ , maka

$$|\underline{a}| = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \text{ dimana } i \text{ adalah baris matriks } (1 \leq i \leq n)$$

Atau bisa menggunakan

$$|\underline{a}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \text{ dimana } j \text{ adalah kolom matriks } (1 \leq j \leq n)$$

Contohnya, untuk menghitung determinan diatas, maka kita menggunakan baris pertama, sehingga kita mendapatkan:

$$\begin{aligned}
 |\underline{a}| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
 |\underline{a}| &= (-1)(-12) + (3)(-2) + (-2)(8) = -10
 \end{aligned}$$

Maka kita mendapatkan nilai invers dari matriks  $|\underline{a}|$  adalah

$$\underline{a}^{-1} = \frac{\underline{C}^T}{|\underline{a}|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -12 & -11 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

### 1.1.9. Invers Matriks Menggunakan Reduksi Kolom

Metode ini juga disebut metode gauss-jordan yaitu dengan melaksanakan pengerjaan operasi matrik yang sama kepada kedua matriks, matriks soal dan matriks identitas. Sehingga matriks identitas mengisi setiap elemen matriks soal.

Contohnya:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sebuah matriks } \underline{a} \text{ akan di invers menggunakan metode reduksi}$$

kolom.

$$\underline{a}^{-1} = \underline{a} \underline{x} = I,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita mulai dengan menggabungkan matriks  $\underline{a}$  dan  $I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Target kita adalah membuat diagonal utama pada matriks  $\underline{a}$  bernilai -1 maka. Baris pertama dikalikan dengan 1/2, sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian baris pertama dikalikan dengan -2 dan hasilnya kita tambahkan kebaris kedua, sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita operasikan baris ketiga dikurangi baris pertama. Sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 + B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian baris kedua dikalikan dengan -1 dan baris ketiga dengan 2, sehingga menjadi

$$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -1B_2 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0$$

$$[0 \quad -1 \quad -1 \mid -1 \quad 1 \quad 0] \xrightarrow{2B_3} [0 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \quad -1 \quad 0]$$

$$0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

Dari situ, kita sudah mendapat nilai nol pada simetri bagian bawah, keudian kita beralih ke simetri bagian atas dari matrik sebelah kiri. Baris kedua dikurangi baris ketiga, sehingga kita dapatkan

$$\frac{1}{1} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad B_2 - B_3 \quad \frac{1}{1} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Kemudian baris ketiga dikalikan dengan  $-1/2$  dan kemudian tambahkan hasilnya kepada baris pertama.

$$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}B_3 + B_1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Kemudian baris pertama dikurang baris kedua, maka kita akan mendapatkan

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad B_1 - B_2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Setelah matriks identitas sudah berpindah seluruhnya, maka invers matriks  $\underline{a}$  adalah

$$\underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

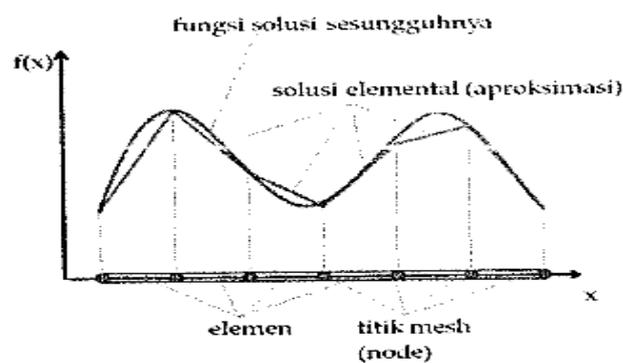
## 1.2. Apa Dan Mengapa : Metode Elemen Hingga

Metode Elemen Hingga adalah metode numerik untuk mendapatkan solusi permasalahan diferensial, baik persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equatiao*n) Maupun persamaan diferensial biasa ( *Partial Differential Equatio*an ). Karna persamaan differensial seringkali digunakan sebagai model permasalahan enjineering maka penting bagi para insinyur untuk dapat memahami dan mampu

menerapkan MEH. Saat ini MEH merupakan salah satu metode numerik paling *versatile* untuk memecahkan problem dalam domain *kontinuum*.

Pada awalnya MEH dikembangkan untuk memecahkan problem dibidang mekanika benda padat (*Solid Mechanic*), tetapi kini MEH sudah merambah kehampir semua problem enjeneering seperti mekanika fluida (*fluid mechanich*), perpindahan panas (*heat transfer*), elektromagnetik (*electro magnetism*), getaran (*vibration*), analisis modal (*modal analysis*), dan banyak lagi problem enjeneering lainnya.

Proses inti MEH adalah membagi problem yang kompleks menjadi bagian-bagian kecil atau elemen-elemen dari mana solusi yang lebih sederhana dapat dengan mudah diperoleh. Solusi dari setiap elemen jika digabungkan akan menjadi solusi problem secara keseluruhan. Gambar 1.1 menjelaskan cara kerja MEH di mana solusi suatu problem yang kompleks diaproksimalkan oleh solusi elemen. Untuk mendapatkan solusi elemental, MEH menggunakan fungsi interpolasi untuk mengaproksimalkan solusi elemen. Untuk contoh ini suatu fungsi linear yang sederhana dipergunakan sebagai fungsi interpolasi. Setelah solusi setiap elemen diperoleh, dengan menggabungkan solusi-solusi elemen maka solusi keseluruhan problem dapat diperoleh. Dengan menggunakan fungsi polinomial seperti fungsi kuadratik sebagai fungsi interpolasi, solusi yang lebih akurat bisa diperoleh.

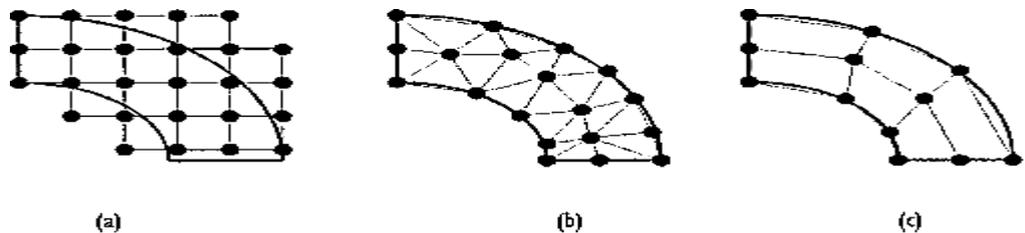


**Gambar 1.1** Aproksimasi solusi keseluruhan diperoleh dari gabungan solusi-solusi elemen

### 1.3. Langkah-Langkah Penerapan Metode Elemen Hingga

Prinsip MEH adalah membagi domain permasalahan, baik itu domain ruang (*spatial domain*) atau domain waktu (*time domain*), menjadi sub domain atau elemen yang lebih kecil. Dengan menghitung solusi pada elemen-elemen dan selanjutnya menggabungkan keseluruhan solusi elemental, solusi total dari permasalahan diperoleh. Dalam menghitung solusi per elemen tentunya solusi elemen harus memenuhi beberapa ketentuan, seperti kontinuitas pada titik-titik nodal dan antarmuka (*interface*) elemen.

Disamping Metode Elemen Hingga, metode numerik lain yang umum digunakan adalah Metode Perbedaan Hingga (MPH). Perbedaan utama dari kedua metode ini terletak pada solusi yang diperoleh dan juga bentuk (*geometri*) dari domain. MPH menghasilkan solusi aproksimasi pada titik-titik nodal (*pointwise solution*). Guna memperoleh solusi yang lebih akurat, jumlah titik nodal diperbanyak. MPH sulit digunakan pada domain dengan bentuk geometri yang kompleks. Hal ini dapat dipahami dari Gambar 1.2 yang berupa sebuah seperempat profil annulus. Mesh MPH digambarkan pada Gambar 1.2a dan mesh MEH pada Gambar 1.2b dan 1.2c jelas terlihat bahwa dengan menggunakan MPH, titik-titik mesh (*nodes*) tidak dengan tepat berada pada batas annulus. Hal ini akan mengurangi akurasi hasil dari MPH. Secara logika MPH dapat digunakan pada problem dengan domain yang kompleks asalkan kita gunakan ukuran mesh yang kecil sehingga boundary domain dapat diikuti titik-titik mesh secara lebih akurat. Hal ini tidak menjadi masalah jika MEH digunakan karena titik-titik mesh MEH dapat diletakkan pada batas domain (Gambar 1.2b dan 1.2c). Gambar 1.2 menggambarkan dua jenis elemen MEH, yaitu elemen segitiga (*triangular element*) dan segiempat (*quadrilateral element*).



**Gambar 1.2** (a) Mesh Metode Perbedaan Hingga, (b) elemen segitiga, (c) elemen segiempat • adalah titik mesh (*nodes*)

Dengan MEH, solusi yang diperoleh adalah fungsi interpolasi setiap elemen. Setelah fungsi interpolasi elemen dihitung, solusi keseluruhan dapat diperoleh. Fungsi-fungsi interpolasi setiap elemen ditentukan oleh nilai pada titik mesh.

Pada perinsipnya penerapan Metode Elemen Hingga terdiri dari langkah- langkah sebagai berikut :

### **1. Diskritisasi Domain**

Pada tahap ini kita tentukan jenis elemen yang akan kita gunakan. Untuk problem 2-dimensi (Gambar 1.2), elemen 2-dimensi yang umum digunakan adalah tiga sisi (*triangular*) atau empat sisi (*quadrilateral*). Elemen-elemen ini bisa berupa elemen linear ataupun non-linear. Untuk problem 3 dimensi, elemen 3dimensi yang umum digunakan adalah elemen terrahedral (empat muka) dan heksahedral (enam muka). Terlihat pada Gambar 1.2, elemen-elemen yang digunakan mempunyai ukuran yang berbeda-beda. Ini adalah salah satu keunggulan dari MEH dibanding MPH, dimana elemen-elemen yang berbeda ukuran dapat digunakan. Elemen-elemen berukuran kecil dapat digunakan pada daerah dengan gradiasi nilai yang besar. Jenis-jenis elemen yang umum digunakan pada metode elemen hingga akan kita bahas pada Bab 4.

### **2. Penentuan Bentuk Fungsi Aproksimasi**

Pada tahap ini bentuk dari fungsi interpolasi ditentukan, Fungsi yang umum digunakan adalah fungsi polinomial. Tingkat dari polinomial ini ditentukan oleh jumlah node pada setiap elemen dan syarat kontinuitas yang diperlukan pada batas elemen. Untuk elemen segitiga dengan tiga titik nodal, fungsi interpolasinya adalah fungsi linear atau polinomial tingkat 1. Dengan enam titik nodal, fungsi interfolasi yang digunakan adalah fungsi polinomial tingkat 2 atau fungsi kuadratik.

### **3. Penghitungan Properti Elemen**

Fungsi interpolasi yang telah ditentukan pada tahap 2 kemudian disubstitusikan kembali pada persamaan-persamaan diferensial dan diproses guna

mendapatkan sistem persamaan linear atau sistem matriks yang merupakan properti dari elemen yang terkait. Ada beberapa cara yang digunakan untuk mendapatkan persamaan linear tersebut, antara lain pendekatan direk, pendekatan variasional, pendekatan residu berbobot (*weighted residue*) dan pendekatan keseimbangan energi. Beberapa dari teknik ini akan kita pelajari di buku ini.

#### **4. Pembentukan Sistem Persamaan Linear**

Matriks-matriks elemen yang terbentuk kemudian digabung menjadi matriks global. Ukuran matriks elemen adalah jumlah node perlemen dikalikan jumlah *degree of freedom* (*dof*) setiap node. Jadi untuk elemen segitiga dengan 3 node dan 1 *dof*, ukuran dari matriks elemennya adalah 3x3. Seandainya setiap node mempunyai 2 *dof* maka ukuran matriks elemennya adalah 6x6.

#### **5. Pemecahan Sistem Persamaan Linear**

Sistem global yang terbentuk pada tahap 4 dapat berupa sistem persamaan linear atau sistem persamaan non-linear. Jika sistem yang terbentuk berupa sistem persamaan linear teknik-teknik umum untuk memecahkan sistem dapat kita gunakan. Beberapa teknik yang umum digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linear telah dibahas oleh penulis [Kosasih, 2006].

#### **6. Post Process Hasil**

Setelah solusi diperoleh dari tahap 5, hasil dapat ditampilkan berupa grafik contour atau plot. Jika ada parameter lain yang bergantung pada hasil maka parameter ini dihitung setelah hasil diperoleh.

### **1.4. Perkembangan Metode Elemen Hingga**

Metode Elemen Hingga awalnya dikembangkan untuk industri pesawat terbang pada tahun 1950-an oleh Boeing dan Bell Aerospace. Artikel journal pertama tentang metode ini ditulis oleh Turner, *et al.* Tulisan ini menjabarkan bagaimana formulasi elemen ditemukan dan elemental matriks dibentuk. Pada saat itu mereka belum menggunakan istilah *Finite Element Method* (MEH). Istilah Metode Elemen Hingga pertama kali digunakan oleh Clough pada tahun 1960 lewat tulisannya mengenai elastisitas.

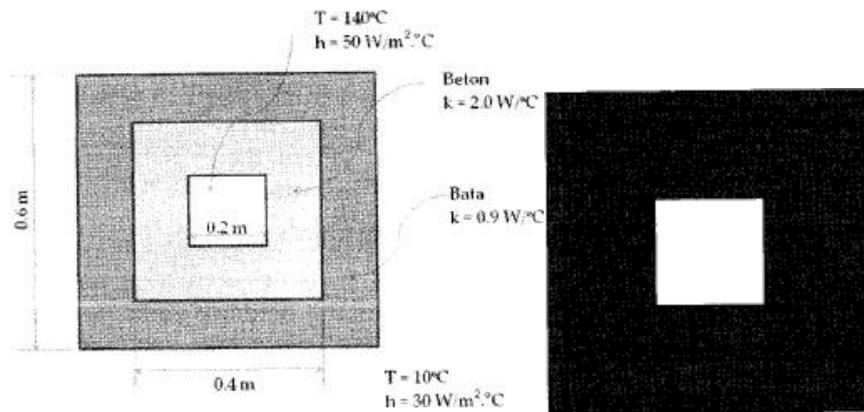
Pada awalnya perkembangan MEH agak sedikit lambat karena kemampuan komputer saat itu membatasi kegunaan dari MEH dan kurangnya

bukti-bukti matematik yang solid. Namun demikian beberapa peneliti seperti Zienkiwicz, Iron, Owen dan Gallagher melihat potensi dari MEH dan terus mengembangkan teknik MEH. Seiring dengan perkembangan perangkat komputermaka permasalahan yang dapat dipecahkan semakin bervariasi dan berbagai program komputer ditulis. Hal ini diikuti dengan berkembangnya beberapa program komersial MEH, seperti NASTRAN yang dikembangkan oleh Nasa padatahun 1965, ANSYS yang dibuat oleh John Swanson dan dikomersialkan pada tahun 1969, ABAQUS pada tahun 1978 yang dibuat khusus untuk problem non- linear, dan LS-DYNA yang khusus untuk non-linear problem oleh John Hallquist di Livermore National Laboratory. Saat ini MEH sudah menjadi mata kuuiah wajib di banyak fakultas teknik' Para mahasiswa teknik, terutama teknik sipil dan teknik mesin, diharuskan memelajari dan mampu menggunakan program MEH.

### **1.5. Contoh-Contoh Aplikasi Metode Elemen Hingga**

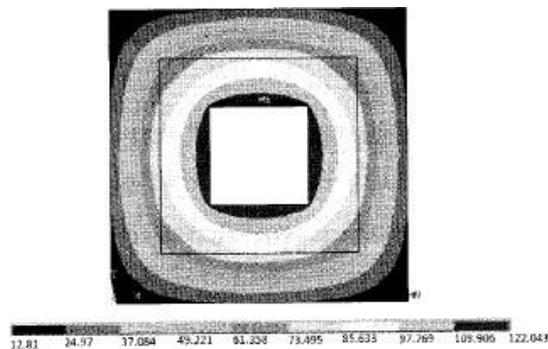
Berbagai macam pemasalahan telah dianalisis dengan menggunakan MEH. Aplikasi Metode Elemen Hingga dapat digolongkan menurut tiga kategori [Huebner,1975]. Yang pertama adalah jenis permasalahan yang dikenal sebagai problem equilibrium atau problem *steady-state*. Contoh-contoh problem equilibrium pada problem mekanika benda pejal adaiah penghitungan tegangan (*stress*) dan regangan (*strain*), pada problem perpindahan panas konduksi (*conduction heat transfer*) penghitungan distribusi suhu, pada problem mekanika fluida, tekanan, kecepatan dan suhu fluida dapat dihitung oleh MEH.

Contoh problem konduksi panas pada Gambar 1.3a menggambarkan distribusi suhu dinding cerobong asap. Dinding cerobong terdiri dari dua bahan: beton dan bata. Suhu gas di dalam cerobong bagian dalam adalah 140°C dan suhu udara di bagian luar adalah 10°C. Pada problem ini variable yang ingin kita ketahui adaiah suhu pada sisi luar karena jika suhu terlalu tinggi maka lapisan beton harus dipertebal. Dengan menggunakan Mechanical APDL, program MEH dari ANSYS suhu pada setiap bagian dapat dihitung. Gambar 1.3b memberikan mesh yang digunakan dan Gambar 1.3c memberikan distribusi suhu di tembok cerobong.



(a)

(b)



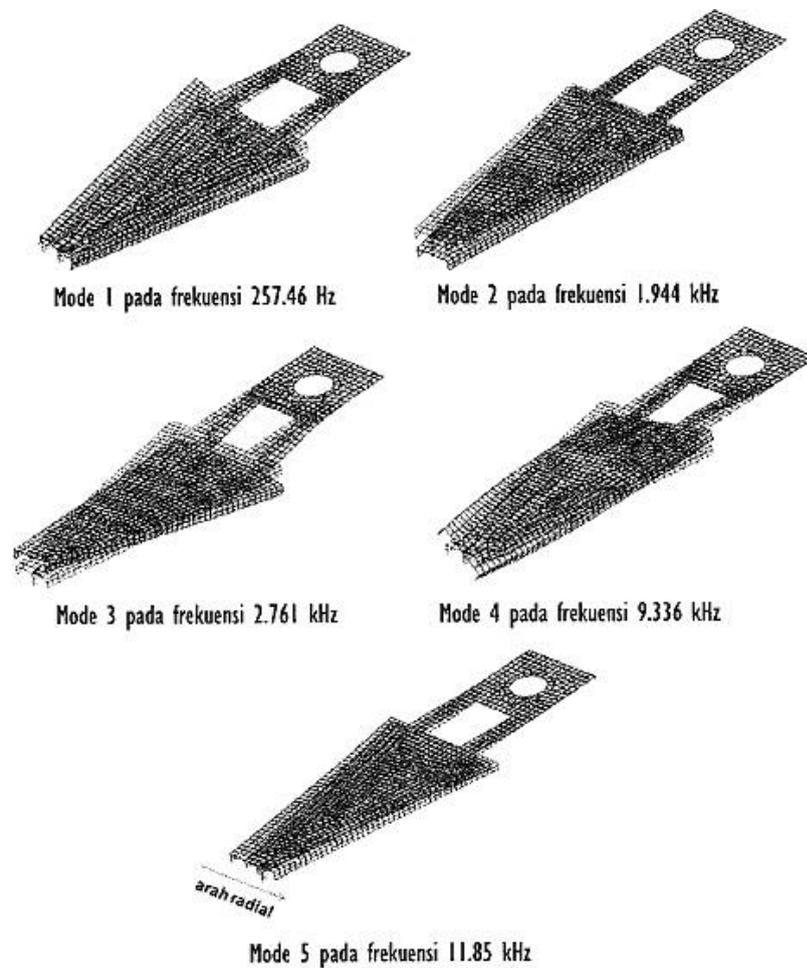
(c)

**Gambar 1.3** (a) Parameter problem cerobong, (b) Mesh cerobong, (c) Distribusi suhu di cerobong.

Jenis problem yang lain adalah problem eigenvalue di mana frekuensi natural (*natural frequency*) dan mode dari getaran (*vibration mode*) dari suatu struktur perlu dihitung. Bagi para enjineer yang merancang struktur atau komponen di mana terdapat beban dinamik (*dynamic loading*), frekuensi natural dan mode vibrasi merupakan parameter yang perlu dipertimbangkan pada tahap perancangan.

Gambar 1.4 adalah contoh suatu komponen suspensi dari harddisk drive. Kerja harddisk sangat sensitif dengan getaran, terutama getaran pada arah radial. Oleh karenanya perancang harddisk perlu mengetahui frekuensi natural suspensi di mana mode vibrasi pada arah radial terjadi. Dengan menggunakan MEH (pada contoh ini, program Mechanical APDL digunakan) frekuensi-frekuensi natural dari suspensi ini diperoleh beserta dengan mode vibrasinya. Dari hasil yang diperoleh dapat dilihat bahwa getaran radial terjadi pada mode kelima dengan

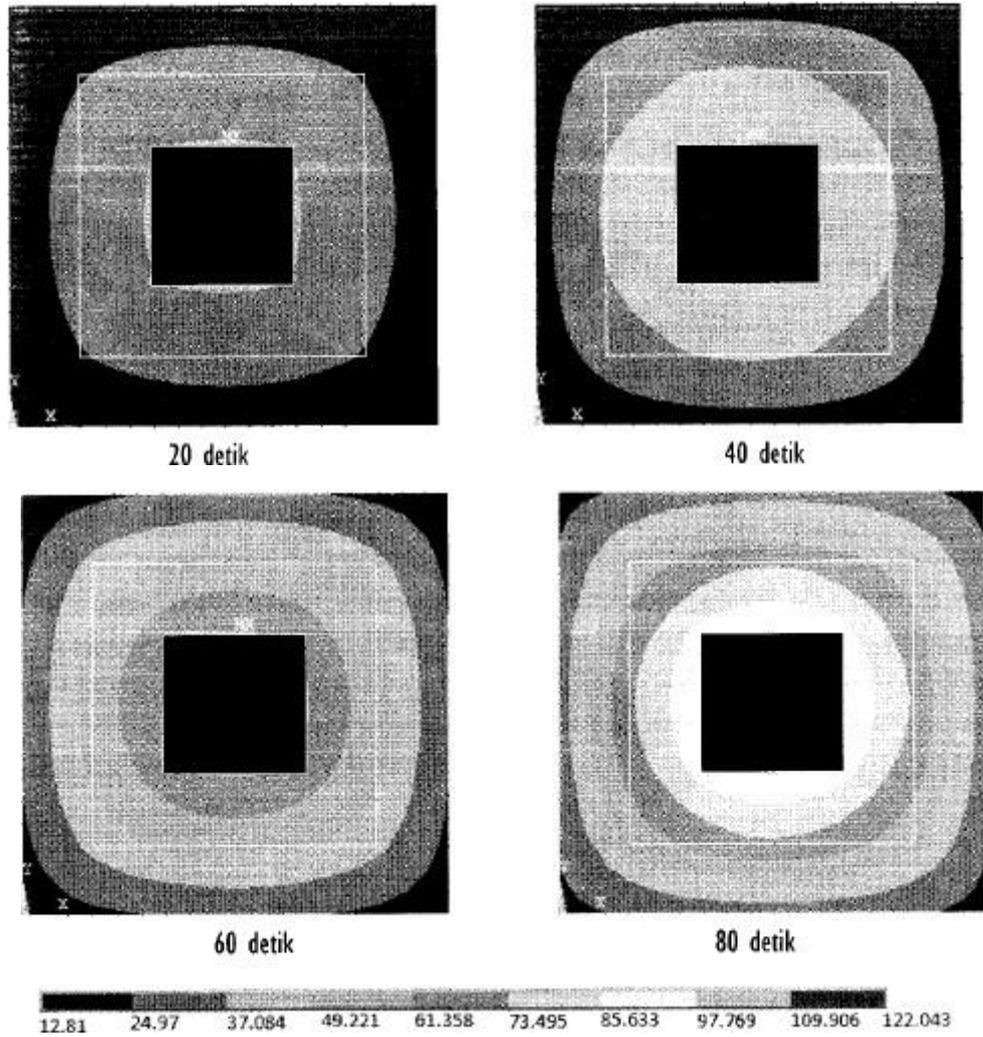
frekuensi natural sebesar 11.85 kHz. Dengan informasi ini, pengoperasian harddisk pada frekuensi ini harus dihindari.



**Gambar 1.4** Mode-mode vibrasi suspense harddisk

Jenis problem yang ketiga adalah problem yang bergantung dengan waktu (*time-dependent*) atau *transient problem*. Untuk menjelaskan contoh problem ini kita gunakan kembali contoh cerobong asap. Jika sebelum gas mengalir di dalam cerobong suhu dari dinding cerobong sama dengan suhu udara di luar cerobong, yaitu 10°C, dan sesaat setelah gas panas (140°C) mulai mengalir maka suhu dinding akan naik dan akhirnya mencapai equilibrium atau steady-state. Jika kita ingin mengetahui.

progresi suhu dinding mulai dari gas mengalir, analisis transient harus dilakukan. dengan menggunakan Mechanical APDPL, distribusi suhu pada dinding cerobong dapat diprediksi. Gambar 1.5 menggambarkan distribusi suhu beberapa waktu setelah gas mengalir.



**Gambar 1.5** Suhu pada dinding cerobong pada waktu yang berbeda.

## BAB II

### ANALISIS RANGKA BATANG (TRUSS)

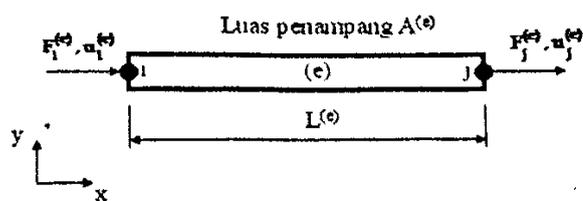
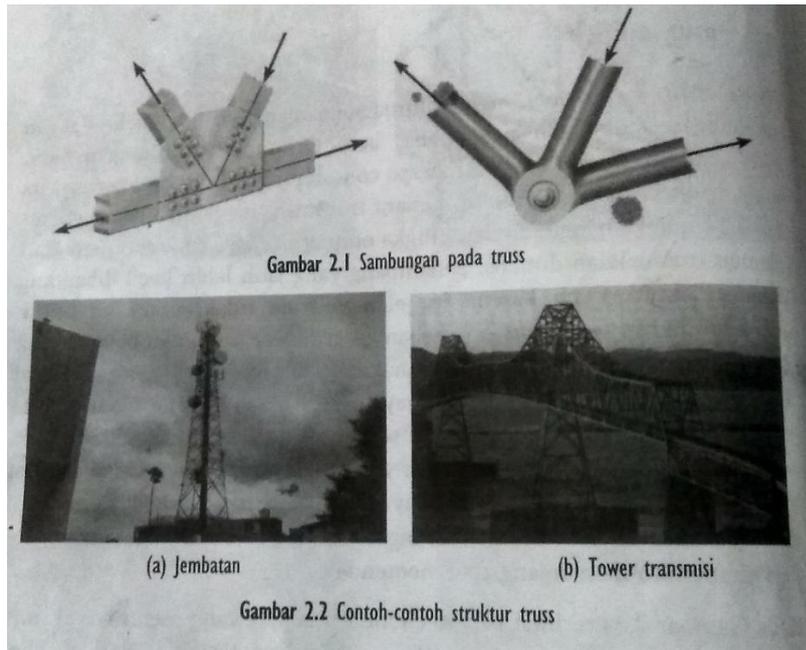
#### 2.1. Pendahuluan

*Truss* terdiri dari elemen-elemen lurus memanjang (*trusselement*) dengan sambungan-sambungan yang bebas berputar, seperti sambungan baut, *rivet* atau pin (Gambar 2.1). Beberapa contoh rangka *truss* yang sering kita jumpai sehari-hari antara lain menara transmisi, rangka jembatan (Gambar 2.2), rangka bangunan dan rangka otomotif (*chassis*). Karakteristik dari elemen *truss* adalah dimensi penampang yang jauh lebih kecil dibanding dimensi aksial. Oleh karena itu elemen *truss* tidak dirancang untuk menahan beban torsi (*torsion*), beban geser (*shear load*), dan beban tekuk (*bending*). Elemen *truss* hanya digunakan untuk menahan gaya aksial. Hal ini mungkin jika hanya ada dua gaya kolinear (gayayang bereaksi pada sumbu elemen) yang bereaksi pada setiap elemen. Untuk keseimbangan, kedua gaya ini bereaksi dengan arah yang berlawanan. Karenanya elemen *truss* dikenal sebagai elemen dua gaya (*two-force element*). Gaya-gaya ini menyebabkan elemen itu memanjang atau memendek.

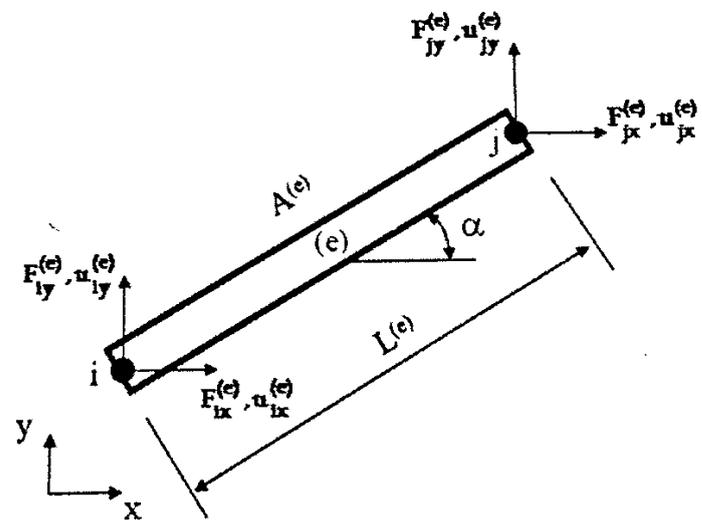
Pada Gambar 2.3a terlihat bahwa elemen *truss* ada yang mempunyai sumbu aksial yang parallel dengan sumbu x system koordinat x-y dan ada yang mempunyai sumbu aksial dengan sudut  $\alpha$  terhadap sumbu-x (Gambar 2.3b). Dari analisis *truss*, apa yang ingin kita ketahui adalah pergeseran (*deformation*) dan besarnya tegangan/tekanan (*internal stress*) anggota-anggota *truss* pada regime elastic. Struktur *truss* bisa merupakan struktur planar (2 dimensi) atau strukturuang (3 dimensi).

Analisis *truss* menjadi sederhana jika sifat bahan *truss* tidak berubah pada saat terbebani. Juga jika pergeseran yang terjadi kecil sehingga perubahan geometris tidak mempengaruhi persamaan-persamaan yang diturunkan.

Oleh karenanya metode analisis *truss* yang kita bahas pada bab ini tidak dapat diterapkan untuk menganalisis permasalahan yang melibatkan *yielding*, *buckling*, atau pergeseran yang besar sehingga perubahan geometri harus diperhitungkan dengan memperbarui geometri. Untuk permasalahan dengan pergeseran yang besar, analisisnya menjadi analisis permasalahan non-linear.



(a)



(b)

**Gambar 2.3** (a) Elemen bersumbu aksial sejajar dengan sumbu x,  
 (b) Elemen bersumbu aksial dengan sudut  $\alpha$  terhadap sumbu x.

## 2.2. Elemen Truss Satu Dimensi

Mari kita analisis elemen *truss* 1-dimensi (Gambar 2.3a). Pada elemen *truss*, gaya-gaya eksternal hanya bereaksi pada ujung-ujung elemen: node *i* dan *j*. Sebagai akibat dari beban ini maka elemen (*e*) akan memanjang atau memendek. Pada buku ini superskrip (*e*) menandakan elemen ke (*e*) sedangkan subskrip menandakan nomer elemen. Sebagai contoh, pergeseran sejajar sumbu-x node *j*

akan dituliskan sebagai  $u_{jx}^{(2)}$  yang menandakan komponen-x dari variable *u* untuk local node *j* elemen (2).

Guna menghitung pergeseran elemen (*e*), kita gunakan analisis statis. Untuk memenuhi syarat keseimbangan (*equilibrium*) atau menghindari terjadinya pergerakan badan rigid (*rigid body motion*) maka

$$\sum_i F_x = 0 : F_i^{(e)} + F_j^{(e)} = 0 \rightarrow F_i^{(e)} = -F_j^{(e)} \dots \dots \dots (2.1)$$

Sedangkan gaya internal,  $f^{(e)}$ , yang bereaksi pada elemen digambarkan secara sembarang pada masing-masing bagian tetapi harus berlawanan arah (Gambar 2.4). Guna memenuhi kondisi keseimbangan node *i* dan *j* maka

$$\sum_i f_n (\text{node } e) : F_i^{(e)} + f_i^{(e)} = 0 \rightarrow F_i^{(e)} = -f_i^{(e)} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\sum_j f_n (\text{node } e) : F_j^{(e)} + f_j^{(e)} = 0 \rightarrow F_j^{(e)} = -f_j^{(e)} \dots \dots \dots (2.3)$$



**Gambar 2.4** Gaya Internal pada elemen

Besarnya gaya internal  $f^{(e)}$ , dapat dihitung dari pergeseran node :  $u_i^{(e)}$  dan  $u_j^{(e)}$  sesuai hukum Hooke.

$$\alpha^{(e)} = E^{(e)} s^{(e)} \dots \dots \dots (2.4)$$

Dimana  $\alpha^{(e)}$  adalah tegangan (*stress*),  $E^{(e)}$  adalah Young modulus dan  $s^{(e)}$  adalah regangan (*strain*) yang merupakan rasio perubahan panjang,  $\delta^{(e)}$  dan panjang awal,  $L^{(e)}$ .  $\delta^{(e)}$  diberikan

$$\delta_j^{(e)} = U_i^{(e)} - U_j^{(e)} \dots \dots \dots (2.5)$$

Dan regangan,  $s^{(e)}$  diberikan oleh

$$s^{(e)} = \frac{\delta_j^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{U_j^{(e)} - U_i^{(e)}}{L^{(e)}} \dots \dots \dots (2.6)$$

Persamaan 2.6 dapat juga diperoleh dengan mengumpamakan elemen *truss* sebagai elemen 1-dimensi di mana pergeseran di elemen diberikan oleh persamaan

$$U_i^{(e)} = U^{(e)} S_i^{(e)} + U_j^{(e)} S_j^{(e)} \dots \dots \dots (2.7)$$

$S_i$  dan  $S_j$  adalah fungsi bentuk (*Shape Function*) sehingga  $u$  pada node  $i$  sama dengan  $u_i$  dan pada node  $j$  sama dengan  $u_j$ . Fungsi-fungsi yang memenuhi syarat-syarat ini adalah

$$S_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \dots \dots \dots (2.8)$$

$$S_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \dots \dots \dots (2.9)$$

Dapat dihitung dari (2.8) dan (2.9) bahwa  $S_i$  bernilai satu pada node  $i$  dan nol pada node  $j$ . Sebaliknya  $S_j$  bernilai satu pada node  $j$  dan nol pada node  $i$ . Selanjutnya strain,  $s^{(e)}$ , diberikan oleh

$$s^{(e)} = \frac{du^{(e)}}{dx} = U_i^{(e)} \frac{dS_i^{(e)}}{dx} + U_j^{(e)} \frac{dS_j^{(e)}}{dx} = \frac{U_j^{(e)} - U_i^{(e)}}{L^{(e)}} \dots \dots \dots (2.10)$$

Yang sama dengan persamaan (2.6). Selanjutnya dengan menggunakan definisi *stress*  $\sigma^{(e)}$  yang diberikan oleh

$$\sigma_{A^{(e)}}^{(e)} = \frac{F^{(e)}}{A^{(e)}} \dots \dots \dots (2.11)$$

Dan dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan (2.10) dan (2.11) ke persamaan (2.4) diperoleh

$$\frac{f^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} (u_j^{(e)} - u_i^{(e)}) \dots\dots\dots (2.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.12) ke persamaan (2.2) dan (2.3) kita peroleh dua persamaan

$$F_i^{(e)} = k^{(e)}(u_i^{(e)} - u_j^{(e)}) \dots\dots\dots (2.13)$$

$$F_j^{(e)} = k^{(e)}(-u_i^{(e)} + u_j^{(e)}) \dots\dots\dots (2.14)$$

Di mana  $k^{(e)}$  adalah koefisien kekakuan (*stiffness coefficient*) yang bergantung pada sifat bahan dan geometris dari truss dan diberikan oleh (2.5).

$$k^{(e)} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \dots\dots\dots (2.15)$$

Dengan  $k^{(e)}$  dari (2.15) system persamaan (2.13) dan (2.14) dapat dituliskan dalam suatu system matriks sebagai berikut:

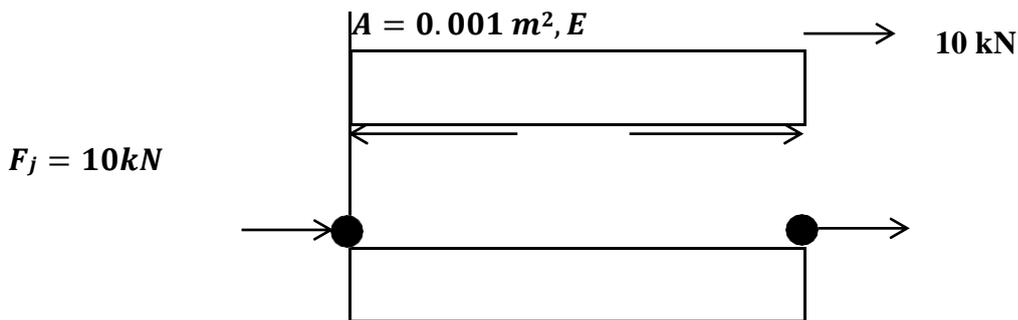
$$\begin{Bmatrix} F_i^{(e)} \\ F_j^{(e)} \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.16)$$

$$(F^{(e)}) \qquad (K^{(e)}) \qquad (u^{(e)})$$

Di mana  $F^{(e)}$  adalah vector gaya,  $K^{(e)}$  adalah matriks kekakuan (*element stiffness matriks*) dan  $u^{(e)}$  adalah vektor pergeseran (*displacement vector*).

**Contoh 2.1**

Sebuah batang terbebani gaya aksial sebesar 10 kN. Tentukan pemanjangan batang ini. Contoh ini dapat dengan mudah diselesaikan menggunakan teori elastisitas , tetapi kita akan menggunakan MEH untuk menghitungnya.



Dengan menggunakan sebuah elemen truss, model dari balok ini diberikan oleh gambar diatas. Sistem metriks untuk satu elemen hanyakah system untuk elemen itu sendiri yang diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.16)

$$F_i = R_i - k^{(1)} u_i \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = k^{(1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Menurut persamaan (2.15)  $k^{(1)}=400e^6\text{N/m}$  dan Karena node  $i$  terkonstrain

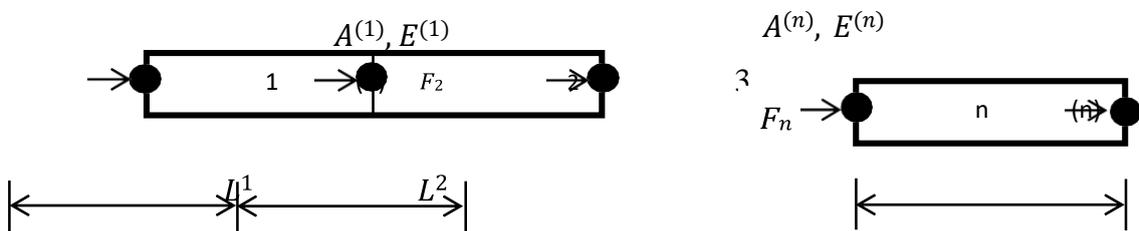
$u_i= 0$  maka dari lajur kedua kita dapat persamaan

$$F_j = 400e^6 u_j \rightarrow u_j = \frac{10e^3}{400e^6} = 0,025 \text{ m}$$

Selanjutnya reaksi  $R_i$  dapat dihitung dari persamaan yang diberikan oleh lajur pertama.

$$R_i = k^{(1)}(u_i - u_j) = 400e^6(0 - 0,025e^{-3}) = 10 \text{ kN}$$

Seandainya model elemen hingga dari contoh diatas terdiri beberapaelemen truss seperti diberikan oleh gambar 2.5 dibawah, relasi antara gaya dan pergeseran pada setiap elemen tetap diberikan oleh persamaan (2.16).



**Gambar 2.5** Problem terdiri dari beberapa elemen truss aksial 1-dimensi. Untuk elemen (1)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Dan elemen (2)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Dan elemen (n)

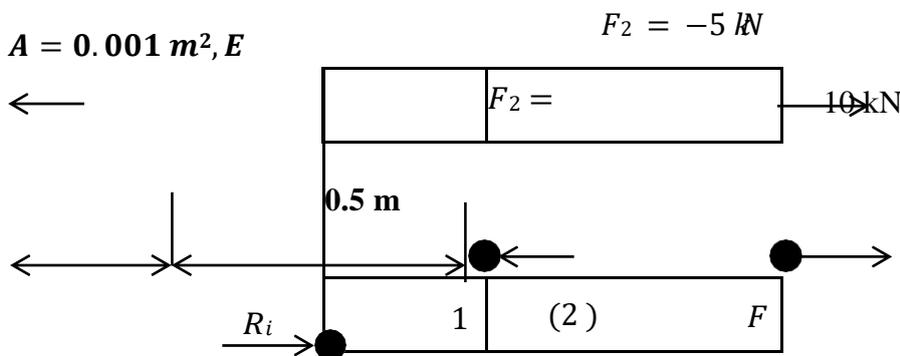
$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = k^{(n)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Guna mendapatkan system global, semua persamaan (2.17) – (2.19) digabung hingga membentuk system global (2.20).

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^{(2)} + k^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k^{(n)} + k^{(n+1)} \\ 0 & 0 & \dots & -k^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Dimana  $F$  adalah vektor gaya global termasuk gaya reaksi pada penyangga,  $K$  adalah matriks kekakuan (*global stiffness*) global dan  $u^e$  adalah vektor pergeseran global. **Contoh 2.2**

Sebuah batang terbebani gaya sebesar 10kN dan 5 kN. Tentukan pergeseran pada lokasi dimana gaya berada ( $u_1$  dan  $u_2$ ) dan reaksi pada nide 1.



Pada contoh ini batang dibagi menjadi dua elemen. Kekakuan pada masing-masing elemen diperoleh sesuai (2.15).

$$k^1 = \frac{200e^9 \times 0.001}{0.25} = 800e^6 \text{ N/m}$$

$$k^2 = \frac{200e^9 \times 0.001}{0.5} = 400e^6 \text{ N/m}$$

Dan system elemental matriks dari masing – masing elemen ini adalah

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = 800e^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 400e^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggabungkan kedua matriks maka kita akan mendapatkan system matriks global dan problem ini.

$$R_1 = R^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -5000 & 8+4 & -4 \\ 10000 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -5000 & 8+4 & -4 \\ 10000 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Karena  $u_1 = 0$ , guna menghitung  $u_2$  dan  $u_3$  kita hanya perlu memecahkan system sebesar  $2 \times 2$ .

$$\begin{bmatrix} -5000 & -4 \\ 10000 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

System ini dapat dipecahkan menggunakan metode – metode untuk menghitung system persamaan [Kosasih, 2016] dengan hasil

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \\ 31.25 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

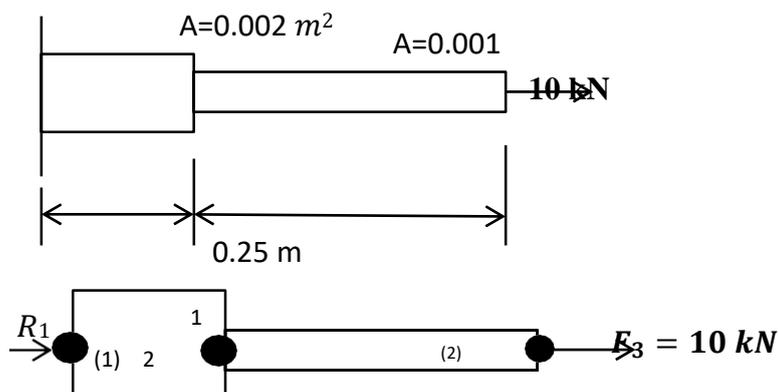
Selanjutnya gaya reaksi pada node 1 dihitung menggunakan persamaan pada lajur pertama.

$$R_1 = 100e^6(-8 \times 6.25e^{-6}) = -5 \text{ kN}$$

Dari sini terlihat bahwa pembagian elemen ditentukan pada titik-titik dimana ada gaya atau perubahan property dari balok. Contoh 2.3 lebih memperjelas hal ini.

### Contoh 2.3

Sebuah balok terbebani gaya sebesar 10kN. Tentukan pergeseran pada node 2 dan 3 ( $u_2$  dan  $u_3$ ) dan reaksi  $R_1$ .



Pada contoh ini balok dibagi menjadi dua elemen. Node di mana elemen dibagi adalah titik di mana adaperubahan penampang . Sesuai data yang diberikan, koefisian untuk masing –masing elemen adalah

$$k^1 = \frac{200e^9 \times 0,002}{0.25} = 1.600e^9 N/m$$

$$k^2 = \frac{200e^9 \times 0,001}{0.5} = 400e^6 N/m$$

System elemental matriks dari masing masing elemen adalah

$$[F_2] = \begin{bmatrix} R_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 1.6e^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[F_3] = \begin{bmatrix} F_2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 400e^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggabungkan kedua matriks ini, matriks global didapat:

$$[F] = \begin{bmatrix} R_1 & -16 & 0 \\ -16 & 16+4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100e^6 & -16 & 0 \\ -16 & 20 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Guna menghitung  $u_2$  dan  $u_3$  kita hanya perlu mmemecahkan system sebesar 2x2.

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 100000 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100e^6 \times 20 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sistem ini dapat dipecahkan dengan hasil

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \\ 31.25 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ mm}$$

31.25

Gaya reaksi pada node 1 diberikan oleh persamaan pada lajur pertama.

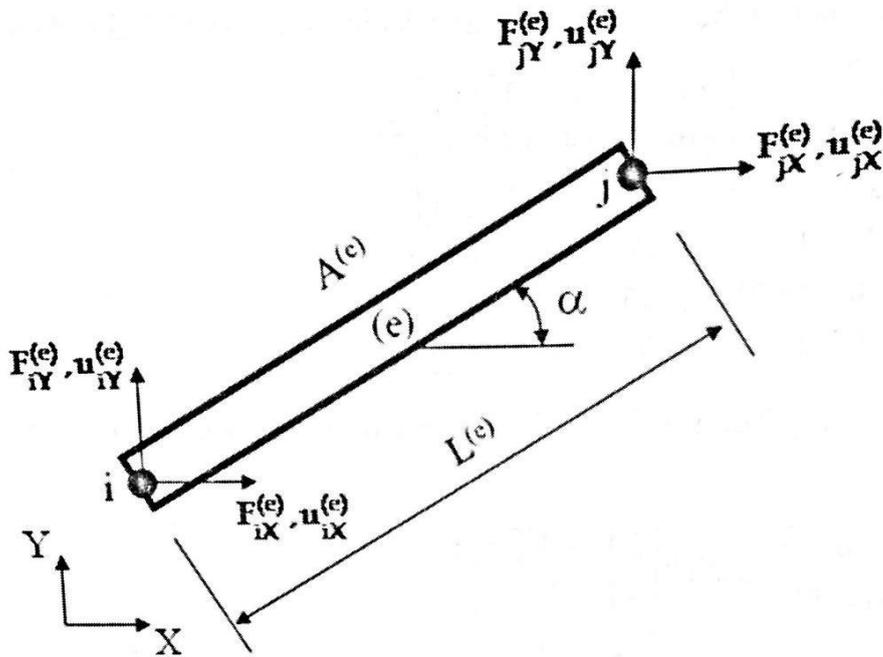
$$R_1 = 100e^6(-16 \times 6.25e^{-6}) = -10kN$$

### 2.3. Elemen Truss Dua Dimensi

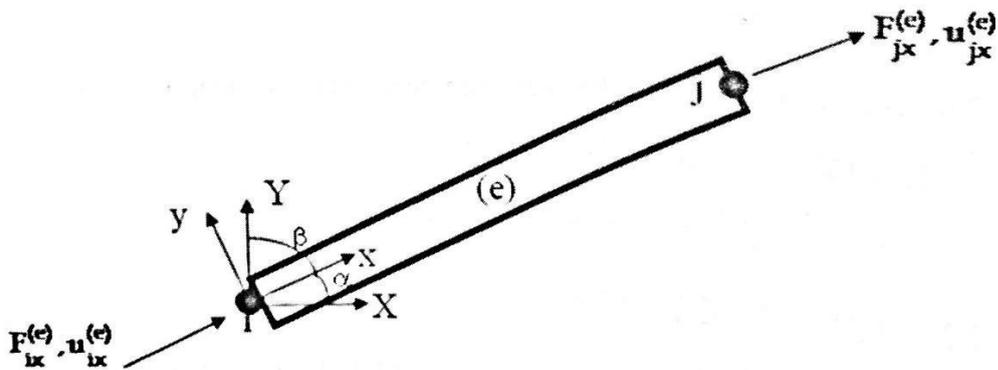
Elemen truss 2-dimensi (Gambar 2.5a) mempunyai 4 *dof*, yaitu pergeseran setiap elemen diberikan oleh 4 pergeseran nodal  $U_{ix}$ ,  $U_{iy}$ ,  $U_{jx}$ , dan  $U_{jy}$  pada koordinat sistem global X-Y.

Persamaan (2.16) hanya dapat diterapkan pada sistem koordinat lokal (x-y).

$$\begin{matrix} F_{ix} \\ \begin{matrix} F^{(e)} \\ \begin{matrix} F_{iy} \\ F_{jy} \end{matrix} \end{matrix} \\ (e) \end{matrix} = \begin{matrix} (e) & 1 & -1 \\ * & -1 & \end{matrix} \begin{matrix} U_{ix} \\ K_{xy}^{(e)} U_{jx} \end{matrix} \dots \dots \dots (2.20)$$



(a)



(b)

Gambar 2.5 Elemen-elemen aksial 2-dimensi, (a) gaya dan pergeseran dalam koordinat sistem global x-y, (b) dalam sistem koordinat lokal x-y.

Supaya sistem lokal (x-y) dapat di transformasikan ke sistem koordinat global X-Y, gaya pada koordnat sistem lokal (x-y) diekspresikan dalam koordinat sistem global (X-Y) menggunakan transformasi berikut :

$$F_{iK} = F_{iK} \cos \alpha \quad F_{iF} = F_{iK} \cos \beta \quad (2.21)$$

$$F_{jK} = F_{jK} \cos \alpha \quad F_{jF} = F_{jK} \cos \beta$$

Transformasi ini dapat diekspresikan dalam matriks

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{ix}$$

$$[F_{jK}]^{(e)} = [ [F_{jF}] \quad 0 \quad \cos \alpha ] [F_{jx}]^{(e)} \dots \dots \dots (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta$$

$$F_{xy}^{(e)} \quad T^{T(e)} \quad F_{xy}^{(e)}$$

Dengan menggunakan transformasi yang sama, pergeseran titik-titik nodal dierikan oleh

$$\begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_{ix}$$

$$[U_{jK}]^{(e)} = [ [U_{jF}] \quad 0 \quad \cos \alpha ] [U_{jx}]^{(e)} \dots \dots \dots (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta$$

$$U_{xy}^{(e)} \quad U \quad T^{T(e)}$$

Di mana matriks transformasi  $T^{T(e)}$  adalah

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

Dengan menggabungkan (2.20), (2.22), dan (2.23) maka kita peroleh

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix}^{(e)} = T^{(e)} \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \end{bmatrix}^{(e)} \dots \dots \dots (2.25)$$

$$[F_{jK}]^{(e)} \quad [F_{jF}]^{(e)} \quad K^{(e)} \quad U^{(e)} \quad [U_{jK}]^{(e)} \quad [U_{jF}]^{(e)}$$

$$F_{xy}^{(e)} \quad F \quad K^{(e)}$$

Kalau  $K^{(e)}$  adalah matriks kekakuan pada sistem koordinat lokal (x-y) maka  $K^{(e)}$  adalah matriks kekakuan global untuk elemen truss 2- dimensi.

$$K^{(e)} = T^{T(e)} K^{(e)} T^{(e)} \dots \dots \dots (2.26)$$



Hasil dari persamaan (2.26) setelah ketiga matriks dikalikan adalah

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ [-\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Term cos pada persamaan (2.27) adalah arah kosinus (*directional cosine*) yang di berikan oleh :

$$\cos\alpha = \frac{K_j - K_i}{L^{(e)}} \quad (2.28)$$

Dan

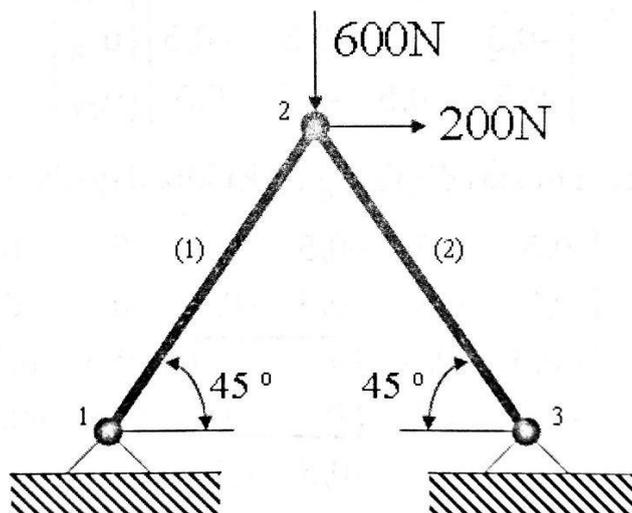
$$\cos\beta = \frac{F_j - F_i}{L^{(e)}} \quad (2.29)$$

Panjang elemen  $L^{(e)}$  diberikan oleh

$$L^{(e)} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (2.30)$$

### Contoh 2.4

Hitung pergeseran nodal 2 dan besarnya tegangan pada kedua elemen truss dari rangka di bawah. Properti dar truss adalah  $E = 200 \text{ Gpa}$ ,  $A = 0,004 \text{ m}^2$  dan panjang 2,83 m.



Kedua elemen mempunyai properti yang sama sehingga

$$K^{(1)} = K^{(2)} = \frac{AE}{L} = 2,83 \text{ e}^8 \text{ N/m}$$

Matriks kekakuan global elemen (1):  $i = 1$  dan  $j = 2$

$$K^{(1)} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} \cos^2 45 & \cos 45 \cos 45 & -\cos^2 45 & -\cos 45 \cos 45 \\ \cos 45 \cos 45 & \cos^2 45 & -\cos 45 \cos 45 & -\cos^2 45 \\ -\cos^2 45 & -\cos 45 \cos 45 & \cos^2 45 & \cos 45 \cos 45 \\ -\cos 45 \cos 45 & -\cos^2 45 & \cos 45 \cos 45 & \cos^2 45 \end{bmatrix}$$

Setelah dihitung  $K^{(1)}$ , hubungan gaya dan pergeseran (2.25) untuk elemen (1) adalah

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2K} \\ F_{2F} \end{bmatrix} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2K} \\ U_{2F} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Elemen (2):  $i = 3$  dan  $j = 2$ :

Matriks kekakuan elemen (2) sama dengan elemen (1), sehingga

$$\begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{2K} \\ F_{2F} \end{bmatrix} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{2K} \\ U_{2F} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Setelah kedua sistem di atas digabung maka kita dapatkan sistem global

$$\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{bmatrix} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 & 0 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0 & 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{1Y} \\ u_{2X} \\ u_{2Y} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{bmatrix}$$

Karena  $u_{1X} = u_{1Y} = u_{3X} = u_{3Y} = 0$ , kita hanya perlu menghitung  $u_{2X}$  and  $u_{2Y}$  saja. Dan sistem 2x2 yang perlu dipecahkan adalah

$$\begin{bmatrix} F_{2X} \\ F_{2Y} \end{bmatrix} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2X} \\ u_{2Y} \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan  $F_{2X} = 200$  N dan  $F_{2Y} = -600$  N ke persamaan di atas

$$\begin{bmatrix} 200 \\ -600 \end{bmatrix} = 2,83e^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2X} \\ u_{2Y} \end{bmatrix}$$

Hasilnya adalah  $u_{2X} = 0,0707e-5$  m dan  $u_{2Y} = -0,2120e-5$  m. Dengan menggunakan persamaan lajur 1-2 dan 5-6, gaya-gaya reaksi pada node 1 dan 3 dihitung sebagai berikut:

Node 1:  $F_{1x} = 200 \text{ N}$  dan  $F_{1y} = 200 \text{ N}$

Node 3:  $F_{3x} = -400 \text{ N}$  dan  $F_{3y} = 400 \text{ N}$

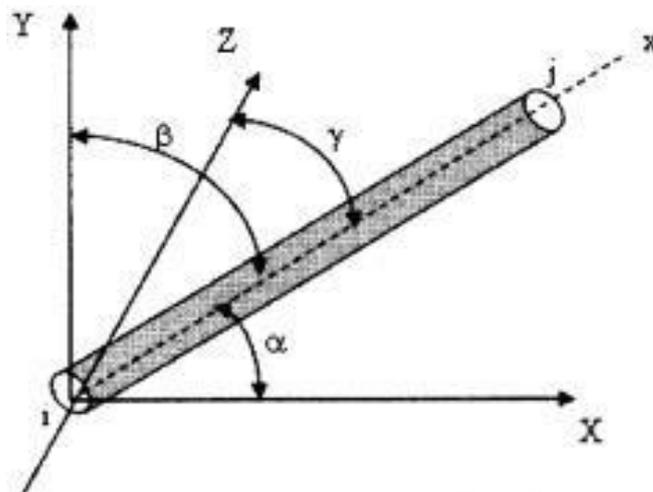
Dan stress pada setiap elemen adalah

$$\sigma^{(1)} = \frac{F_{1x}}{A_1} = \frac{(F_{1x} \cos 45 + F_{1y} \cos 45)}{A_1} = 70,71 \text{ kPa (kompresi)}$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{F_{3x}}{A_3} = \frac{(F_{3x} \cos 45 + F_{3y} \cos 45)}{A_3} = 141,421 \text{ kPa (kompresi)}$$

### 2.4. Elemen Truss Tiga Dimensi

Truss 3-dimensi (Gambar 2.6) dikenal sebagai truss ruang (space truss). Elemen truss 3-dimensi mempunyai 6 dofyang terdiri dari 6 pergeseran nodal  $u_i, u_j, u_k, u_l, u_m, u_n$  pada koordinat sistem global XYZ.



Gambar 2.6 Elemen truss 3-dimensi.

Sama halnya dengan elemen 2-dimensi vektor gaya,  $F_{xyz}$ , dan vektor pergeseran  $u_{xyz}$ , diperoleh dari transformasi dari lokal koordinat sistem ke global koordinat sistem.

$$\mathbf{F}_{XYZ}^{(e)} = \mathbf{T}^{T(e)} \mathbf{F}_{xyz}^{(e)} \dots\dots\dots (2.31)$$

$$\mathbf{u}_{XYZ}^{(e)} = \mathbf{T}^{T(e)} \mathbf{u}_{xyz}^{(e)} \dots\dots\dots (2.32)$$

dengan matriks transformasi

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.33)$$

Dengan cara yang sama, untuk menurunkan (2.25), hubungan antara  $p^{(e)}$  dan  $u^{(e)}$  dapat diperoleh

$$\mathbf{F}_{XYZ}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}_{XYZ}^{(e)} \dots\dots\dots (2.34)$$

Kalau  $\mathbf{K}_{xyz}$  adalah matriks kekakuan pada sistem koordinat lokal (xyz) maka  $\mathbf{K}^{(e)}$  adalah matriks kekakuan global elemen 3-dimensi yang diberikan oleh

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}(e)} \mathbf{K}_{xyz} \mathbf{T} \dots\dots\dots (2.35)$$

Hasil dari persamaan (2.35) setelah ketiga matriks dikalikan adalah

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma & -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{bmatrix}$$

Term cos pada persamaan (2.36) adalah arah kosinus (directional cosine) yang diberikan oleh:

$$\cos\alpha = \frac{X_j - X_i}{L^{(e)}} \dots\dots\dots (2.37)$$

$$\cos\beta = \frac{Y_j - Y_i}{L^{(e)}} \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\cos\gamma = \frac{Z_j - Z_i}{L^{(e)}} \dots\dots\dots (2.39)$$

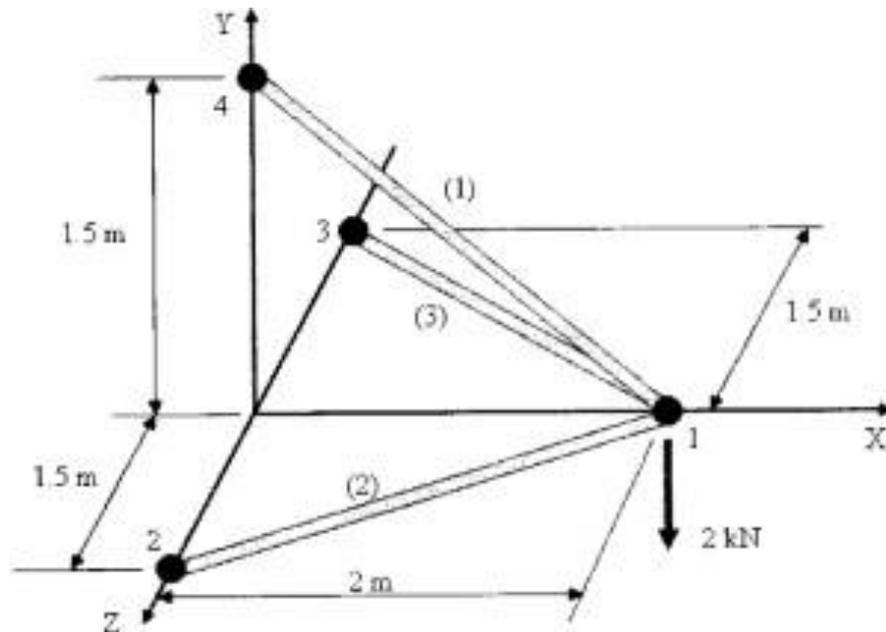
Dan panjang elemen  $L^{(e)}$  diberikan oleh

$$L^{(e)} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \dots\dots\dots (2.40)$$

Prosedur pembentukan matriks kekakuan elemen dan penggabungan sistem elemen ke global sistem sama dengan proses pada truss 2-dimensi.

### 2.5. Contoh Soal

Struktur truss 3-dimensi di bawah terdiri dari tiga elemen dengan luas penampang yang sama, yaitu  $15 \text{ cm}^2$ . Truss terbuat dari baja dengan Young's Modulus,  $E = 200 \text{ GPa}$ . Hitung: pergeseran titik penyambung node 1, tegangan (stress) pada setiap member, dan gaya-gaya reaksi pada node 2, 3,



dan 4

Struktur di atas terdiri dari 3 elemen, elemen (1) (node J-4), elemen (2) (node 1-ZJ), dan elemen (3) (node J-3). Dari geometri, panjang ketiga elemen  $L_1=L_2=L_3=2.5 \text{ m}$ . Karena ketiga elemen juga mempunyai luas dan properti yang sama maka koefisien kekakuan  $k_1=k_2=k_3=1,2 \times 10^8 \text{ N/m}$ . Matriks kekakuan masing-masing elemen adalah :

Elemen (1)

$$\cos \alpha = \frac{0-2}{2,5} = -0,8 \rightarrow \alpha^{(1)} = 143,13^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{1,5-0}{2,5} = 0,6 \rightarrow \beta^{(1)} = 53,13^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{0-0}{2,5} = 0 \rightarrow \gamma^{(1)} = 90^\circ$$

Dengan mensubstitusikan sudut-sudut ini ke persamaan (2.36), matriks kekakuan elemen (J) diperoleh

$$\mathbf{K}^{(1)} = 1,2e^8 \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & 0 & -0,64 & 0,48 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0 & 0,48 & -0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0 & 0,64 & -0,48 & 0 \\ 0,48 & -0,36 & 0 & -0,48 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen (2)

$$\cos \alpha = \frac{0-2}{2,5} = -0,8 \rightarrow \alpha^{(2)} = 143,13^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{0-0}{2,5} = 0 \rightarrow \beta^{(2)} = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{1,5-0}{2,5} = 0,6 \rightarrow \gamma^{(2)} = 53,13^\circ$$

Matriks kekakuan elemen (2) adalah

$$\mathbf{K}^{(2)} = 1,2e^8 \begin{bmatrix} 0,64 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & 0,48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,48 & 0 & 0,36 & 0,48 & 0 & -0,36 \\ -0,64 & 0 & 0,48 & 0,64 & 0 & -0,48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0,36 \end{bmatrix}$$

Elemen (3)

$$\cos \alpha = \frac{0-2}{2,5} = -0,8 \rightarrow \alpha^{(3)} = 143,13^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{0-0}{2,5} = 0 \rightarrow \beta^{(3)} = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{-1,5-0}{2,5} = -0,6 \rightarrow \gamma^{(3)} = 126,87^\circ$$

Matriks kekakuan elemen (3) adalah

$$K^{(3)} = 1,2e^8 \begin{bmatrix} 0,64 & 0 & 0,48 & 0,64 & 0 & -0,48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0 & 0,36 & -0,48 & 0 & -0,36 \\ 0 & 0 & -0,48 & 0,64 & 0 & 0,48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,48 & 0 & -0,36 & 0,48 & 0 & 0,36 \end{bmatrix}$$

Dengan menggabungkan ketiga elemental matriks ini, system global dapat kita bentuk sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} F_{1K} \\ F_{1F} \\ F_{1Z} \\ F_{2K} \\ F_{2F} \\ F_{2Z} \\ F_{3K} \\ F_{3F} \\ F_{3Z} \\ F_{4K} \\ F_{4F} \\ F_{4Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,92 & 0,48 & 0 & -0,64 & 0 & 0,48 & -0,64 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,48 & -0,36 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0,48 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & -0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0 & 0,48 & 0,64 & 0 & -0,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0 & -0,48 & 0 & 0 & 0 & 0,64 & 0 & 0,48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,48 & 0 & -0,36 & 0 & 0 & 0 & 0,48 & 0 & 0,36 & 0 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,64 & -0,48 & 0 \\ 0,48 & -0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,48 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1K} \\ u_{1F} \\ u_{1Z} \\ u_{2K} \\ u_{2F} \\ u_{2Z} \\ u_{3K} \\ u_{3F} \\ u_{3Z} \\ u_{4K} \\ u_{4F} \\ u_{4Z} \end{bmatrix}$$

Karena  $u_{2K} = u_{2F} = u_{2Z} = u_{3K} = u_{3F} = u_{3Z} = u_{4K} = u_{4F} = u_{4Z} = 0$ , kita hanya perlu menghitung  $u_{1K}$ ,  $u_{1F}$ , dan  $u_{1Z}$  saja. Dan system 3x3 yang perlu dipecahkan adalah

$$\begin{bmatrix} F_{1K} = 0 & 1,92 & -0,48 \\ F_{1F} = -2000 & -0,48 & 0,36 \\ F_{1Z} = 0 & 0 & 0,72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1K} \\ u_{1F} \\ u_{1Z} \end{bmatrix}$$

Dari system persamaan linear diperoleh  $u_{1K} = -0,1736e^{-4}$ ,  $u_{1F} = -0,6944e^{-4}$ , dan  $u_{2Z} = 0$  m. sedangkan gaya-gaya reaksi pada nodal 2, 3, dan 4 diperoleh dari :

$$\begin{aligned} F_{2K} &= -1,2e^8 \times 0,64 \times -0,1736e^{-4} = 1333,25 \text{ N} \\ F_{2F} &= 0 \text{ N} \\ F_{2Z} &= 1,2e^8 \times 0,48 \times -0,1736e^{-4} = -1000 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_{3K} = -1,2e^8 \times 0,64 \times -0,1736e^{-4} = 1333,25 \text{ N}$$

$$F_{3F} = 0 \text{ N}$$

$$F_{3Z} = -1,2e^8 \times 0,48 \times -0,1736e^{-4} = 1000 \text{ N}$$

$$F_{4K} = 1,2e^8 \times (-0,64 \times -0,1736e^{-4} + 0,48 \times -0,6944e^{-4}) = -2666,5 \text{ N}$$

$$F_{4F} = 1,2e^8 \times (0,48 \times -0,1736e^{-4} - 0,36 \times -0,6944e^{-4}) = 2000 \text{ N}$$

$$F_{4Z} = 0 \text{ N}$$

Dan stress pada masing-masing member dapat dihitung

$$\sigma_A^{(1)} = \frac{F_4}{A} = \frac{\sqrt{(-2666,5)^2 + (2000)^2}}{0,0015} = \underline{\underline{2,22 \text{ MPa (tension)}}}$$

$$\sigma_A^{(2)} = \frac{F_2}{A} = \frac{\sqrt{(1333,25)^2 + (-1000)^2}}{0,0015} = \underline{\underline{1,11 \text{ MPa (kompresi)}}}$$

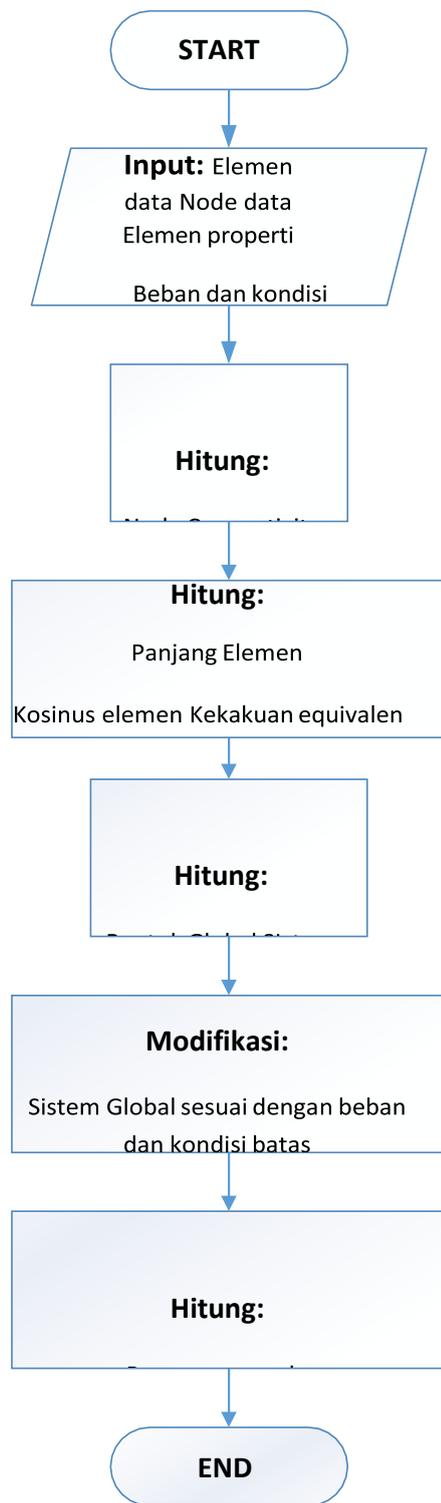
$$\sigma_A^{(3)} = \frac{F_3}{A} = \frac{\sqrt{(1333,25)^2 + (-1000)^2}}{0,0015} = \underline{\underline{1,11 \text{ MPa (kompresi)}}}$$

.....

## 2.6. Program Matlab Untuk Analisis Truss 3-Dimensi

Teknik penghitungan perpindahan nodal, gaya-gaya reaksi dan (stress) pada elemen truss seperti dibahas di atas jika diterangi program komputer dapat menjadi alat yang sangat berguna untuk menganalisis struktur rangka batang. Sekarang mari kita pelajari program berbasis MATLAB dituliskan.

Dalam penulisan suatu program, pertama-tama kita buat flowchart dari program. Flowchart dari program yang akan kita tulis diberikan oleh Gambar 2.7. Program MEH umumnya terdiri dari tiga bagian utama, yaitu pre-processor, processor dan post-processor. Pada bagian pre-processor, data-data geometrik dihitung atau diberikan sebagai data input, properti mekanik dari truss ditentukan, syarat batas (*boundary conditions*) diterapkan. Pada tahap processor, matriks kekakuan elemen dihitung, global matriks kekakuan dibentuk dan dihitung sesuai syarat batas yang ditentukan. Pada tahap ini solusi diperoleh. Pada tahap post-processor, hasil diberikan dan diproses lebih lanjut. Jadi setelah data perpindahan diperoleh maka stress pada setiap elemen truss dihitung, Jika diperlukan maka hasilnya dapat diberikan dalam bentuk visualisasi grafis.



```

1 %.....
2 % This program solves SPACE TRUSS problem.
3 %
4 % It calculates the deflection of each joint,
5 % the stresses in each member, and the reaction
6 % forces.
7 %
8 % Input are prepared in text files:
9 % element.txt <-- element data
10 % node.txt <-- node data
11 %
12 % Written by: P.B. Kosasih
13 %.....
14 clear all;
15 %----- INPUT DATA -----
16 [el,el_i,el_j,el_area,youngs] = textread(_element.txt');
17 [x_node,y_node,z_node,fx,fy,fz,x_fixed,y_fixed,z_fixed] =
18 textread(_node.txt');
19 TotEl = length(el);
20 TotNode = length(x_node);
21 Totdof = TotNode * 3;
22
23 %----- Nodal connectivity for each element -----
24 For k = 1:TotEl
25 for I = 1:3
26 nnodes(k,i) = (el_i(k)-1)*3+I; % (k,1) node i ux component
27 % (k,2) node i uy component
28 % (k,3) node i uz component
29 nnodes(k,3+i) = (el_j(k)-1)*3+I; % (k,4) node j ux component
30 % (k,5) node j uy component
31 % (k,6) node j uz component
32 end

```

```

33 end
34
35 %----- Calculate element length -----
36 El_length = sqrt((x_node(el_j(1:TotEl))-x_node(el_i(1:TotEl))).^2.+...
37             ((y_node(el_j(1:TotEl))-y_node(el_i(1:TotEl))).^2.+...
38             ((z_node(el_j(1:TotEl))-z_node(el_i(1:TotEl))).^2.+...
29
40 %----- Calculate direction cosines -----
41 El_alfa=acos((x_node(el_j(1:TotEl))-x_node(el_i(1:TotEl)))/El_length);
42 El_beta=acos((y_node(el_j(1:TotEl))-y_node(el_i(1:TotEl)))/El_length);
43 El_gamma= acos((z_node(el_j(1:TotEl))-z_node(el_i(1:TotEl)))/El_length);
44
45 %----- Calculate element equivalent spring stiffness -----
46 Keq = el_area.*youngs./El_length;
47
48 %-----Calculate element stiffness matrices -----
49 klocal(1;TotEl,1,1) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_alfa);
50 klocal(1;TotEl,1,2) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_beta);
51 klocal(1;TotEl,1,3) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_gamma);
52 klocal(1;TotEl,1,4) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_alfa);
53 klocal(1;TotEl,1,5) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_beta);
54 klocal(1;TotEl,1,6) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_gamma);
55
56 klocal(1;TotEl,2,1) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_alfa);
57 klocal(1;TotEl,2,2) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_beta);
58 klocal(1;TotEl,2,3) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_gamma);
59 klocal(1;TotEl,2,4) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_alfa);
60 klocal(1;TotEl,2,5) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_beta);
61 klocal(1;TotEl,2,6) = keq .* -cos(El_alfa) .* cos(El_gamma);
62
63 klocal(1;TotEl,3,1) = keq .* cos(El_alfa) .* cos(El_alfa);

```

```

64 klocal(1;TotEl,3,2) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);
65 klocal(1;TotEl,3,3) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
66 klocal(1;TotEl,3,4) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_alfa);
67 klocal(1;TotEl,3,5) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);
68 klocal(1;TotEl,3,6) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
69
70 klocal(1;TotEl,4,1) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_alfa);
71 klocal(1;TotEl,4,2) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);
72 klocal(1;TotEl,4,3) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
73 klocal(1;TotEl,4,4) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_alfa);
74 klocal(1;TotEl,4,5) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);
75 klocal(1;TotEl,4,6) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
76
77 klocal(1;TotEl,5,1) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_alfa);
78 klocal(1;TotEl,5,2) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);
79 klocal(1;TotEl,5,3) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
80 klocal(1;TotEl,5,4) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_alfa);
    klocal(1;TotEl,5,5) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_beta);

```

```

81 klocal(1;TotEl,5,6) = keq .* cos(EI_beta) .* cos(EI_gamma);
82
83 klocal(1;TotEl,6,1) = keq .* -cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
84 klocal(1;TotEl,6,2) = keq .* -cos(EI_beta) .* cos(EI_gamma);
85 klocal(1;TotEl,6,3) = keq .* -cos(EI_gamma) .* cos(EI_gamma);
86 klocal(1;TotEl,6,4) = keq .* cos(EI_alfa) .* cos(EI_gamma);
87 klocal(1;TotEl,6,5) = keq .* cos(EI_beta) .* cos(EI_gamma);
88 klocal(1;TotEl,6,6) = keq .* cos(EI_gamma) .* cos(EI_gamma);
89
90 %----- Assemble the global matrix -----
91 kglobal (Totdof, Totdof) = 0.0;
92
93 for k = 1:TotEI
94     for i=1:6
95         for j=1:6
96             kglobal(nnodes(k,i),nnodes(k,j)) =...

```

```

97   kglobal(nnodes(k,i),nnodes(k,j)+ klocal(k,ij);
98   end
99   end
100  end
101
102  %----- Assemble the force vector -----
103  f(Totdof) = 0.0;
104
105  for k = 1:TotNode
106  f((k-1)*3+1) = fx(k);
107  f((k-1)*3+2) = fy(k);
108  f((k-1)*3+3)=fz(k);
109  end
110
111  %-----Modified global system taking into consideration
112  %-----the boundary condition
113  kglobal_modified = kglobal;
114  f_modified = f;
115
116  for k = 1:TotNode
117  if x_fixed(k)=1
118  kglobal_modified((k-1)*3+1,5) = 0.0;
119  kglobal_modified((k-1)*3+1,(k-1)*3+1) = 1.0;
120  f_modified((k-1)*3+1) = 0.0;
121  end
122
123  if y_fixed(k) = 1
124  kglobal_modified (k-1)*3+2,:) = 0.0;
125  kglobal_modified((k-1) *3+2,(k-1)*3+2) = 1.0;
126  f_modified (k-1)*3+2) = 0.0;
127  end
128
129  if z_fixed(k)=1
130  kglobal_modified (k-1)*3+3.) = 0.0;
131  kglobal_modified (k-1) 3+3,(k-1)*3+3) = 1.0;
132  f_modified (k-1)*3+3) = 0.0;
133  end
134  end
135
136  %-----Solve for the displacement
137  u = kglobal_modified\f modified":

```

Proses input elemen data, data node, elemen properti, beban, dan syarat batas dilakukan dengan memanggil dua text file (element.txt dan node.txt) yang dipersiapkan di notepad. File element.txt terdiri dari 5 kolom dan jumlah lajur sebesar jumlah elemen. Kolom pertama adalah nomor elemen. Kolom kedua dan ketiga memberikan node i dan jelemen. Luas penampang dan Youngs modulus, E dari elemen diberikan pada kolom empat dan lima. Data yang dipersiapkan pada file ini harus mempunyai unit yang benar. Seandainya unit luas adalah  $m^2$  maka unit Youngs modulus adalah Pa. Jika unit luas adalah  $mm^2$  maka unit Youngs modulus yang digunakan adalah MPa. Untuk Contoh 2.5, file element.txt yang dipersiapkan mempunyai isi seperti diberikan oleh Tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Isi file element.txt untuk Contoh 2.5.

el	el_i	el_j	el_area	youngs
↓	↓	↓	↓	↓
1	1	4	0.0015	200e9
2	1	2	0.0015	200e9
3	1	3	0.0015	200e9

Data node diberikan oleh node.txt File ini terdiri dari 9 kolom Kolom pertama memberikan koordinat global (X, Y, dan Z) node. Kolor empat sampai enam memberikan beban eksternal node. Sedangkan kolom tujuh sampai sembilanmenandakan apakah node mempunyai kebase untuk bergeser atau tidak. Seandainya suatu node tidak bisa bergeser maka kolom tujuh sampai sembilan akan berisi angka 1. 1 berarti tidak bergeser sedangkan nol berarti bisa bergeser. Untuk Contoh 25, file node.txt yang dipersiapkan mempunyai isi seperti diberikanpada Tabel 2.2

**Tabel 2.2** isi file node.txt untuk Coresh 2.5

x_node	y_node	z_node	fx	Fy	fz	x_fixed	y_fixed	z_fixed
2	0	0	0	-2000	0	0	0	0
0	0	1,5	0	0	0	1	1	1
0	0	-1,5	0	0	0	1	1	1
0	1,5	0	0	0	0	1	1	1

Hasil yang diberikan oleh program berupa vektor yang terdiri dari pergeseran dari setiap node. Hasil ini mempunyai unit m.u =

1.0e-004

-0.1736

-0.6944

0.0000

0

0

0

0

0

0

0

0

0

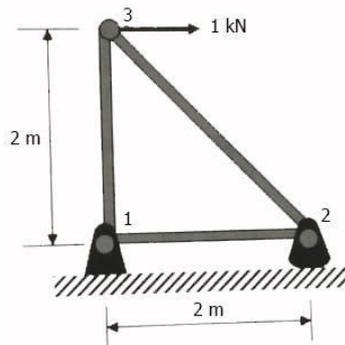
## 2.5 SOAL-SOAL LATIHAN

1. Matriks transformasi untuk space truss (truss 3-dimensi) diberikan oleh persamaan (2.33).

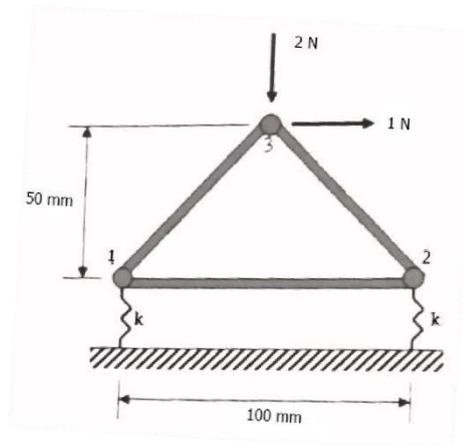
$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.33)$$

Turunkan persamaan (2.33) dengan mengikuti prosedur pada 2.3.

2. Hitung pergeseran nodal 2 dan 3 dan besarnya stress pada ketiga elemen truss. Properti dari truss adalah  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $A = 0,005 \text{ m}^2$ . Kemudian bandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan program MATLAB (2.5).



3. Hitung pergeseran node 1, 2, dan 3 dan besarnya tegangan (stress) pada ketiga elemen truss. Properti dari truss ini adalah  $E = 2.1 \text{ GPa}$  dan  $A = 1 \text{ mm}^2$ . Kekakuan dari kedua pegas adalah  $k = 5 \text{ N/mm}$ . Bandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan program MATLAB (2.5).



## **BAB III PERPINDAHAN PANAS**

### **4.1. Formulasi Perpindahan Panas Konduksi Satu Dimensi**

Dalam bab ini, pembahasan lebih akan berfokus kepada masalah perpindahan panas, meskipun banyak masalah serupa, seperti rembesan melalui media berpori, torsi poros, dan magnetostatik [3] yang dapat diperlakukan dengan bentuk persamaan yang sama (tetapi dengan karakteristik fisik yang berbeda).

Masalah yang sering terjadi pada perpindahan panas adalah penentuan distribusi temperatur sistem. Dengan menggunakan metode elemen hingga maka dapat ditentukan pula jumlah panas yang masuk ke dalam atau keluar dari sistem dan tegangan termal.

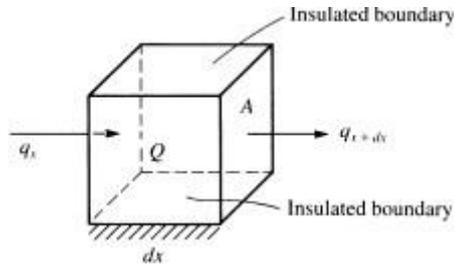
Kami mulai dengan derivasi persamaan diferensial dasar untuk konduksi panas dalam satu dimensi dan kemudian memperpanjang derivasi ini ke kasus duadimensi. Kami kemudian akan meninjau unit yang digunakan untuk jumlah fisik yang terlibat dalam transfer panas.

tinjauan unit yang digunakan untuk jumlah fisik yang terlibat dalam transfer panas. Dalam bab sebelumnya yang berhubungan dengan analisis tegangan, kami menggunakan prinsip energi potensial minimum untuk menurunkan persamaan elemen, di mana fungsi pemindahan yang diasumsikan dalam setiap elemen digunakan sebagai titik awal dalam derivasi. Kami sekarang akan menggunakan prosedur serupa untuk masalah transfer panas nonstruktural. Kami mendefinisikan fungsi suhu yang diasumsikan dalam setiap elemen. Alih-alih meminimalkan energi potensial berfungsi, kita meminimalkan fungsi serupa untuk mendapatkan persamaan elemen. Matriks analog dengan kekakuan dan kekuatan matrik dari hasil masalah struktural.

Kami sekarang mempertimbangkan derivasi persamaan diferensial dasar untuk masalah onedimensional dari konduksi panas tanpa konveksi. Tujuan derivasi ini adalah untuk menyajikan wawasan fisik ke fenomena transfer panas, yang harus dipahami sehingga formulasi elemen hingga dari masalah dapat sepenuhnya dipahami. (Untuk informasi tambahan dalam transfer panas, konsultasikan dengan teks seperti Referensi [1] dan [2].

Formulasi Perpindahan Panas konduksi (tanpa adanya konveksi) satudimensi

Gambar 4.1. Sebuah Volume Kontrol



Kami mulai dengan volume kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.1. Dengan konservasi energi, kami punya:

$$E_{in} + E_{in} = \Delta U + E_{out} \dots\dots\dots(4.1)$$

$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + q_{x+dx} A dt \dots\dots\dots(4.2)$$

Ein adalah besarnya energi masuk kedalam volume atur (J) atau kW.h atau Btu

U adalah perubahan energi yang tersimpan dalam volume atur dengan satuan kW.h atau Btu.

qx adalah heat flux atau jumlah panas yang di transfer ke dalam volume atur pada permukaan x, dengan satuan kW/m<sup>2</sup> atau Btu/(h-ft<sup>2</sup>)

qx+dx adalah jumlah panas yang ditransfer keluar volume atur pada permukaan x+dx

T adalah waktu dengan satuan jam atau detik

Q adalah sumber panas di dalam volume atur dengan satuan kW/m<sup>3</sup> atau Btu/(h-ft<sup>3</sup>). Jika volume atur menghasilkan panas maka nilai Q adalah positif, tapi kalau volume atur menggunakan/menghilangkan panas maka nilainya negatif

A adalah luas penampang yang berkaitan dengan arah dari aliran panas dengan satuan m<sup>2</sup> atau ft<sup>2</sup>

Dengan Hukum Forier terkait perpindahan panas konduksi,

$$\frac{q}{x} = -K \frac{dT}{dx} \dots\dots\dots(4.3)$$

$K_{xx}$  adalah konduktifitas termal pada arah x dengan satuan kW/(m.°C)

T adalah tempertatur (°C) dan

dT/dx adalah perbedaan temperature (°C/m) atau (°F/ft)

Analog dengan persamaan satu dimensi hukum tegangan/regangan pada analisis tegangan, maka kita mendapat

$$\frac{q}{x} = -K \frac{dT}{dx} \Big|_{x}^{x+dx} \dots\dots\dots(4.4)$$

Dimana perbedaan temperatur pada persamaan sebelumnya digambarkan dengan persamaan taylor series expansion yang kita ketahui persamaan secara umumnya adalah

$$f_{x+dx} = f_x + \frac{df}{dx} dx + \frac{d^2f}{dx^2} dx^2 + \dots\dots\dots(4.4)$$

Sehingga apabila diaplikasikan pada perbedaan temperature pada persamaan sebelumnya menjadi

$$\frac{q}{x+dx} = -K \frac{dT}{dx} + \frac{dK}{dx} \frac{dT}{dx} dx \dots\dots\dots(4.5)$$

Perubahan energi yang tersimpan pada volume atur adalah

$$\Delta U = c(\rho A dx) dT \dots\dots\dots (4.6)$$

dimana:

c adalah panas spesifik dalah kWh/(kg.°C) atau Btu/(slug-°F)

ρ adalah massa jenis dengan satuan kg/m3 atau slug/ft3.

Apabila kita substitusikan ketiga persamaan diatas maka kita akanmendapat

**persamaan untuk konduksi satu dimensi** adalah:

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dT}{dx} \right) + Q = \rho c \frac{dT}{dt} \dots\dots\dots(4.7)$$

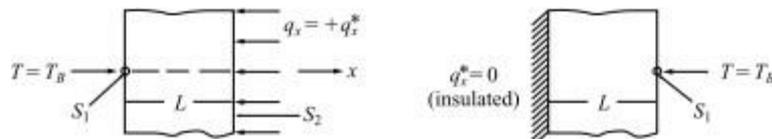
Jika kita asumsikan bahwa proses perpindahan panas terjadi tidaktergantung terhadap waktu (steady-state) maka kita akan mendapatkan persamaan:

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0 \dots\dots\dots(4.8)$$

Dan apabila termal konduktifitas pada volume atur adalah seragam dan juga perpindahan panas tidak tergantung terhadap waktu maka akan kita dapatkan:

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dT}{dx} + Q \right) = 0 \dots\dots\dots(4.9)$$

Apabila kondisi dimana volume atur memiliki kondisi batas seperti ditunjukkan pada gambar dibawah ini,  $T = T_B$  on  $S_1$  dan  $q_x^* = -K_{xx} \frac{dT}{dx} = \text{constant}$  on  $S_2$



Dimana :

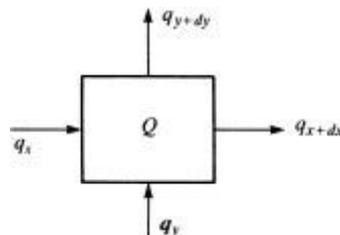
$T_B$  menandakan kondisi batas temperature yang diketahui pada permukaan pertama ( $S_1$ )

$S_2$  permukaan kedua yang memiliki informasi tentang heat flux ( $q_x^*$ ) atau perbedaan temperatur ( $dT/dx$ ).

Nilai  $q_x$  akan menjadi nol apabila permukaan  $S_2$  di berikan insulasi sempurna seperti gambar diatas bagina kedua.

#### 4.2. Formulasi Perpindahan Panas konduksi (non-konveksi) dua dimensi

Pertimbangkan masalah konduksi panas dua dimensi pada Gambar ( ). dengan cara yang mirip dengan kasus satu dimensi, untuk kondisi steady-state, kita dapat menunjukkan bahwa untuk sebuah material bertepatan dengan arah x dan y.



Gambar 4.2. Penampang 2 dimensi

Maka persamaannya menjadi:

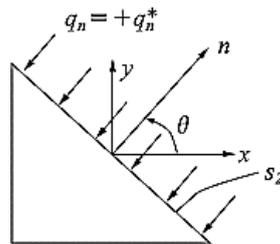
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \dots \dots \dots (4.10)$$

Dengan kondisi batas :

$$T = T_B \text{ pada } S_1, \text{ dan } \dots \dots \dots (4.11)$$

$$q_n = q^* = K \left( C_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = \text{konstan pada } S_2 \dots \dots \dots (4.12)$$

di mana  $C_x$  dan  $C_y$  adalah cosinus arah dari vektor unit  $n$  normal ke permukaan  $S_2$  yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Sekali lagi,  $q^*$  disepakati tandanya, apabila positif maka panas mengalir ke dalam bodi (material)



Gambar 4.3. Unit Vektor ke Permukaan S2

### 4.3. Perpindahan Panas dengan Konveksi

Ketika melakukan kontak antara padatan dengan fluida, akan terjadi perpindahan panas antara permukaan cairan dan padat ketika terjadi perbedaan suhu, maka akan terjadi perpindahan kalor konveksi akibat adanya pemompaan dari luar (konveksi paksa) atau melalui gaya apung yang terjadi akibat perbedaan suhu di dalamnya (konveksi alami atau bebas).

Dengan pertimbangan derivasi persamaan diferensial dasar untuk satu dimensi konduksi dan diaplikasikan ke konveksi, sekali lagi kita mengasumsikan perubahan suhu jauh lebih besar dalam arah  $x$  daripada arah  $y$  dan  $z$ . maka:

$$q_x A dt + Q A dx dt = c (\rho A dx) dT + q_{x+dx} A dt + q_h P dx dt \dots \dots \dots (4.13)$$

dalam Persamaan (4.1) semua istilah memiliki arti yang sama seperti dalam bagian persamaan konduksi kecuali aliran panas oleh transfer panas konvektif diberikan oleh hukum pendinginan Newton

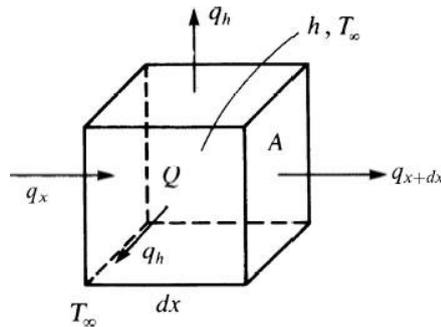
$$q_h = h ( T - T_\infty ) \dots \dots \dots (4.14)$$

dimana:

$h$  adalah koefisien konveksi dalam kW/(m<sup>2</sup>.°C) atau Btu/(h-ft<sup>2</sup>-°F)

$T$  adalah suhu permukaan padat pada antarmuka padat / cair.

$T_\infty$  adalah suhu fluida (di sini suhu fluida aliran bebas).



Gambar 4.4. Volume kontrol untuk satu dimensi konduksi panas dengan konveksi

$P$  dalam Persamaan, (4.11) menunjukkan perimeter sekitar luas penampang konstan  $A$

Sekali lagi menggunakan Persamaan, (4.10) - (4.12) dan (4.14) dalam Persamaan. (4.13), membagi dengan  $A dx dt$  dan menyederhanakan, kita mendapatkan persamaan untuk konduksi panas satu dimensi dengan konveksi sebagai

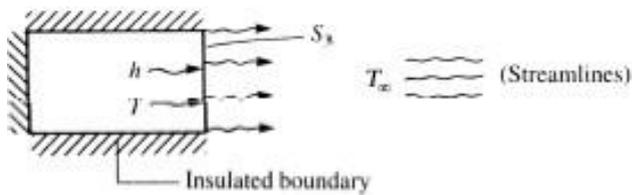
$$\frac{\partial}{\partial x} (K x x^{\partial T}) + \frac{Q}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{h P}{A} (T - T_\infty) \dots \dots \dots (4.15)$$

Dengan kondisi batas yang mungkin pada: 1.

$$T = T_B \quad \text{on } S_1$$

2.

3. Hilangnya panas oleh konveksi dari ujung tubuh satu dimensi, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 13.6,



Gambar 4.5. Ilustrasi model konvektif perindahan panas (panah pada permukaan  $S_x$  menandakan perpindahan panas karna konveksi)

Maka persamaan perpindahan panas konduksi dan konveksi di dinding padat ke aliran panas dalam cairan pada benda padat/antarmuka cairan,

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = h (T - T_\infty) \quad \text{pada } S_x \quad (4.16)$$

#### 4.4. Konduktifitas Termal dan Koefisien Konveksi

Tabel dibawah ini menunjukkan nilai konduktifitas termal dari beberapa material menurut satuan US dan SI. **Konduktifitas termal  $K$** , adalah jumlah energi panas (Btu atau  $W \cdot h$ ) yang akan mengalir melalui satuan panjang (ft atau m) dari zat yang diberikan dalam satuan waktu ( $h$ ) untuk menaikkan suhu satu derajat ( $^{\circ}F$  atau  $^{\circ}C$ ).

Tabel 4.1 daftar beberapa unit khas yang digunakan untuk masalah transfer panas. Tabel 4.2 daftar beberapa konduktivitas termal yang khas dari berbagai zat padat dan cairan. Konduktivitas termal  $K$ , dalam  $Btu/(h \cdot ft^2 \cdot ^{\circ}F)$  atau  $W/(m \cdot ^{\circ}C)$ , mengukur

Tabel 4.1 Sistem satuan pada perpindahan panas

Variabel	SI	U.S Customary
Thermal conductivity, $K$	$kW/(m \cdot ^{\circ}C)$	$Btu/(h \cdot ft^2 \cdot ^{\circ}F)$
Temperature, $T$	$^{\circ}C$ or $K$	$^{\circ}F$ or $^{\circ}R$
Internal heat source, $Q$	$kW/m^3$	$Btu/(h \cdot ft^3)$
Heat flux, $q$	$kW/m^2$	$Btu/(h \cdot ft^2)$
Convection coefficient, $h$	$kW/(m^2 \cdot ^{\circ}C)$	$Btu/(h \cdot ft^2 \cdot ^{\circ}F)$
Energy, $E$	$kW \cdot h$	Btu
Specific heat, $c$	$(kW \cdot h)/(kg \cdot ^{\circ}C)$	$Btu/(slug \cdot ^{\circ}F)$
Mass density, $\rho$	$kg/m^3$	$slug/ft^3$

Tabel 4.2 Tipikal Konduktivitas termal dari beberapa padatan dan cairan

Bahan	K [Btu/(h-ft-°F)]	K [W/ (m · °C)]
<b>Padatan</b>		
Aluminium, 0 °C (32 °F)	117	202
Baja (1% karbon), 0 °C	20	35
Fiberglass, 20 °C (68 °F)	0,020	0,035
Beton, 0 °C	0,468—0,81	0,81-1.40
Bumi, kasar berbatu, 20 °C	0,300	0,520
Kayu, oak, arah radial, 20 °C	0,098	0,17
<b>Cairan</b>		
Oli mesin, 20 °C	0,084	0,145
Udara kering, tekanan atmosfer, 20 °C	0,014	0,0243

Tabel 4.3 Nilai perkiraan koefisien perpindahan panas konveksi

Mode	h [Btu/(h-ftz-°F)]	h [W/(m <sup>2</sup> · °C)]
Konveksi bebas, udara	1—5	5—25
Konveksi paksa, udara	2—100	10—500
Konveksi paksa, air	20—3.000	100—15.000
Air mendidih	500—5.000	2,500—25.000
Kondensasi uap air	1.000—20.000	5.000—100.000

Tabel 4.3 menyusun perkiraan kisaran nilai koefisien konveksi untuk berbagai kondisi konveksi. **Koefisien konveksi  $h$** , dalam Btu/(h-ft<sup>2</sup>-°F) atau W/(m<sup>2</sup> · °C), adalah jumlah energi panas (Btu atau W · h) yang akan mengalir melintasi area satuan (ft<sup>2</sup> atau m<sup>2</sup>) dari zat yang diberikan dalam satuan waktu ( $h$ ) untuk menaikkan suhu satu derajat (°F atau °C).

**Konveksi alami atau bebas** terjadi ketika, misalnya, pelat yang dipanaskan terpapar ke udara ruang sekitar tanpa sumber gerak eksternal. Pergerakan udara ini, yang dialami sebagai akibat dari gradien densitas dekat pelat, disebut konveksi alami atau bebas.

**Konveksi paksa** dialami, misalnya, dalam kasus kipas meniup udara di atas piring.

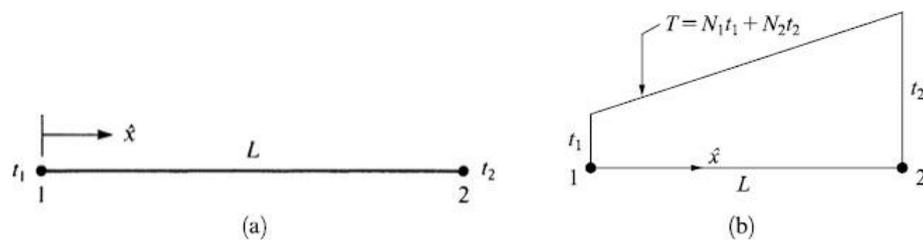
#### 4.5. Formulasi Elemen Hingga Satu Dimensi Menggunakan Metode Variasi

Distribusi temperatur mempengaruhi jumlah panas yang masuk atau keluar dari tubuh dan juga mempengaruhi tekanan di dalam tubuh. Tekanan termal terjadi di semua badan yang mengalami gradien suhu dari beberapa keadaan kesetimbangan tetapi tidak bebas untuk memperluas ke segala arah. Untuk

mengevaluasi tekanan termal, kita perlu mengetahui distribusi temperatur dalam tubuh. Metode elemen hingga adalah metode realistis untuk memprediksi kuantitas seperti distribusi temperatur dan tekanan termal dalam tubuh. Pada bagian ini, kami memformulasikan persamaan transfer panas satu dimensi menggunakan metode variasional. Contoh-contoh disertakan untuk mengilustrasikan solusi dari jenis masalah ini.

### 1. Langkah 1 Pilih Tipe Elemen

Elemen dasar dengan simpul 1 dan 2 ditunjukkan pada Gambar 4.6



Gambar 4.6. (a) Elemen suhu satu dimensi dasar dan (b) variasi suhu sepanjang panjang elemen.

### 2. Langkah 2 Pilih Fungsi Temperatur

Pada langkah ini kita memilih fungsi temperatur  $T$  [Gambar 4.6 (b)] didalam setiap elemen yang mirip dengan fungsi perpindahan, seperti

$$T(x) = N_1 t_1 + N_2 t_2 \dots \dots \dots (4.16)$$

di mana  $t_1$  dan  $t_2$  adalah suhu nodal yang akan ditentukan, dan

$$N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \text{ dan } N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \dots \dots \dots (4.17)$$

dan fungsi bentuk yang sama seperti yang digunakan untuk elemen bar. Matriks  $[N]$  kemudian diberikan oleh

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\hat{x}}{L} & \frac{\hat{x}}{L} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.18)$$

dan matriks suhu nodal yaitu

$$\{t\} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.19)$$

Dalam bentuk matriks, kami mengungkapkan Persamaan. (4.16) sebagai

$$\{T\} = [N] \{t\} \dots\dots\dots (4.20)$$

### 3. Langkah 3 Tentukan Gradient Temperatur/Temperatur Dan Heat Flux/Atau Hubungan Temperatur.

Gradient temperature matriks  $\{g\}$  analog dengan matriks regangan  $\{s\}$  di tunjukkan pada persamaan:

$$\{g\} = \frac{dT}{dx} = [B] \{t\} \dots\dots\dots (4.21)$$

Dimana  $[B]$  didapat dengan mensubstitusikan persamaan 4.16 ke dalam persamaan 4.21 dan kemudian diferensialkan terhadap  $x$ , maka

$$[B] = \left[ \frac{dN_1}{d\hat{x}} \quad \frac{dN_2}{d\hat{x}} \right] \dots\dots\dots (4.22)$$

Dengan menggunakan definisi persamaan 4.17 untuk  $[B]$  maka,

$$[B] = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \dots\dots\dots (4.23)$$

Hubungan Heat flux/gradient temperatur adalah

$$\{g\} = -[K_{xx}] \{g\} \dots\dots\dots (4.24)$$

### 4. Langkah 4 Turunkan matriks elemen konduksi dan persamaannya

Persamaan 4.9 dan 4.15 bisa dituliskan kembali menjadi

$$\pi_h = U + f_{iQ} + f_{iq} + f_{ih} \dots\dots\dots (4.25)$$

Dimana

$$U = \int_V \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \right] dV \quad f_{iQ} = - \int_V Q t dV$$

$$f_{iq} = - \int_{S_2} q^* T dS \quad f_{ih} = \int_{S_3} \frac{h}{\infty} (T - T_\infty)^2 dS \dots\dots\dots (4.26)$$

Dimana S2 dan S3 adalah permukaan terpisah oleh heat flux q\* (nilainya positif) dan kerugian konveksi  $h = (T - T_\infty)$ , kita tidak bisa menentukan q dan h pada permukaan yang sama karena terjadinya secara bersamaan pada permukaan.

Dengan menggunakan persamaan 4.21, 4.22 dan 4.24 kedalam persamaan 4.26, dengan mengambil pengertian persamaan 4.25 maka kita akan mendapatkan

$$\frac{\pi}{h} = \int_V [g]^T [D] [g] dV - \int_V \{t\}^T [N]^T Q dV - \int_{S_2} \{t\}^T [N]^T q^* dS + \int_{S_3} h [(\{t\}^T [N]^T - T_\infty)^2] dS \dots \dots \dots (4.27)$$

Kemudian kita substitusikan persamaa 4.21 kedalam persamaan 4.27, dan kita tahubahwa nodal temperature tidak tergantung terhadap kordinat, maka kita akanmendapat:

$$\frac{\pi}{h} = \{t\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{t\} - \{t\}^T \int_V N^T Q dV - \{t\}^T \int_{S_2} [N]^T q^* dS + \int_{S_3} [\{t\}^T [N]^T [N] \{t\} - (\{t\}^T [N]^T + [N] \{t\}) T_\infty + T_\infty^2] dS \dots \dots \dots (4.28)$$

Pada Persamaan 4.28 kita coba reduksi dengan menuliskan integral permukaan S3 secara eksplisit dengan memindahkan {t} ke bagian sebelah kiri persamaan integral, maka kita akan mendapatkan:

$$\frac{\pi}{h} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{t\} - \int_V N^T Q dV - \int_{S_2} [N]^T q^* dS + \int_{S_3} h [N]^T [N] dS \{t\} - \int_{S_3} [N]^T h \int_{S_3} \{t\} dS = 0 \dots \dots \dots (4.29)$$

Dimana kita reduksi lagi persamaan 4.28 dengan mengeluarkan  $hT^2$  karena konstan. Maka kita akan mendapat persamaan

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_3} h [N]^T [N] dS \{t\} = \{f_Q\} + \{f_q\} + \{f_h\} \dots \dots \dots (4.30)$$

Dimana matriks-matriks gaya telah didefinisikan menjadi

$$\{f_Q\} = \int_V [N]^T Q dV \quad \{f_q\} = \int_{S_2} [N]^T q^* dS \quad \{f_h\} = \int_S [N]^T h T_\infty dS$$

..... (4.31)  
 dalam persamaan 4.31, istilah  $\{f_Q\}$  (sumber panas positif, tenggelamnegatif) adalah dari bentuk yang sama dengan istilah kekuatan temal  $\{f_q\}$  (fluks panas, positif ke permukaan) dan istilah ketiga  $\{f_h\}$  ( perpindahan panas atau konveksi) sama dengan traksi permukaan (pemuatan terdistribusi) dalam masalah analisis tegangan. Anda dapat mengamati fakta ini dengan membandingkan

persamaan. (4.31) dengan persamaan.  $\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_S [N_S]^T \{T_S\} dS$

Karena kami sedang merumuskan persamaan elemen

Dari bentuk  $f = kt$ , kita memiliki elemen matrik konduksi\* untuk permasalahan perpindahan panas diberikan persamaan (4.30) oleh

$$[k] = \iiint_V [B]^T * D * B dv + \iint_{s_3} h [N]^T [N] ds \dots\dots\dots (4.32)$$

Dimana integral yang pertama dan integral yang kedua pada persamaan. (4.32) adalah ari konduksi dan konveksi, secara berturut-turut. Menggunakan persamaan (4.32) didalam persamaan (4.30), untuk setiap elemen maka :

$$\{f\} = [k] \{t\} \dots\dots\dots (4.33)$$

Menggunakan hubungan pertama dari persamaan (4.32), bersama dengan

persamaan (4.32) dan ( $[D] = [K_{xx}]$ ), bagian konduksi dari matrik [k] untuk elemen satu dimensi menjadi :

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dv = \left\{ \frac{1}{L} \right\} \left[ \begin{matrix} k_{xx} & -k_{xx} \\ -k_{xx} & k_{xx} \end{matrix} \right] \dots\dots\dots (4.3)$$

Atau pada akhirnya

$$[k_c] = \left[ \begin{matrix} k_{xx} & -k_{xx} \\ -k_{xx} & k_{xx} \end{matrix} \right] \dots\dots\dots (4.35)$$

Bagian konveksi dari matrik [k] menjadi :

$$[k] = h \iint_{s_3} [N]^T [N] ds = hp \int_0^L \left\{ \frac{1-x}{L} \right\} \left[ \begin{matrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{matrix} \right] dx \dots\dots\dots (4.36)$$

Atau disederhanakan menjadi :

$$[k] = \frac{hPL}{6} \left[ \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right] \dots\dots\dots (4.37)$$

Dimana  $ds = P dx$

Dan P adalah sebuah luas dari elemen ( diasumsikan konstan). Olehkarena itu, menambahkan persamaan (4.35) dan (4.36), kita ketahui bahwa matrik

[k] adalah :

$$[k_c] = \begin{matrix} Ak_{xx} * 1 & -1 & hpL & 2 & 1 \\ L & -1 & 1 & + & 6 & 1 & 2 & + \dots \dots \dots \end{matrix} \quad (4.38)$$

\*Matrik elemen konduksi seringkali disebut *stiffness matrik* karena *stiffness matrik* menjadi umum digunakan untuk mendeskripsikan matrik dari koefisien yang diketahui dikalikan dengan derajat bebas yang tidak diketahui, seperti suhu , displasemen, dan sejenisnya

Saat nilai h adalah nol padabatas elemen. Hubungan kedua pada bagian kanan persamaan (4.38) (bagian konveksi dari [k]) adalah nol. Ini cocok, misal, kebatas yang terisolasi.

Istilah matrik gaya , pada penyederhanaan persamaan (4.31) dan asumsi Q

,  $q^*$ , dan produk  $hT_\infty$  untuk menjadi konstan adalah :

$$\{f\} = \int_V [N]^T Q dV = QA \int_0^L \{1\} dx = \begin{matrix} QAL & \{1\} \\ 2 & 1 \end{matrix} \dots \dots \dots (4.39)$$

Dan

$$\{f\} = \int q^* [N]^T ds = q^* P \int_0^L \{1\} dx = \begin{matrix} q^* AL & \{1\} \\ 2 & 1 \end{matrix} \dots \dots \dots (4.40)$$

Dan

$$\{f\} = \int h T_\infty [N]^T ds = \begin{matrix} hT_\infty PL & \{1\} \\ 2 & 1 \end{matrix} \dots \dots \dots (4.41)$$

Oleh karena itu, menambahkan persamaan (13.4.23) – (13.4.25), kitadapatkan :

$$\{f\} = \begin{matrix} QAL + q^* PL + h PL \\ 2 \end{matrix} \{1\} \dots \dots \dots (4.42)$$

Persamaan (4.42) menunjukkan bahwa setengah dari sumber panas seragam yang diasumsikan Q menuju ke setiap node, setengahnya lagi dari konveksi dari batas permukaan  $hT_\infty$  menuju ke setiap node dari sebuah elemen.

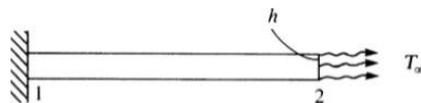
Pada akhirnya, kita harus mempertimbangkan konveksi dari ujung bebas sebuah elemen. Untuk memudahkan. Kita akan mengasumsikan konveksi muncul hanyahnya dari ujung kanan dari sebuah elemen, seperti ditunjukkan pada gambar 4.7 .Istilah penggabungan konveksi tambahan untuk stiffness matrix diberikan :

$$[k_h]_{end} = \iint_S h [N]^T [N] ds \dots\dots\dots(4.42)$$

Sekarang  $N_1 = 0$  dan  $N_2 = 1$  di ujung kanan elemen. Substitusikan Nkedalam persamaan (4.42), kita dapatkan :

$$[k]_{end} = \iint h \{0\} [0 \ 1] ds = hA \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \dots\dots\dots (4.43)$$

$$h \quad S_{end} \quad 1 \quad 0 \quad 1$$



Gambar 4.7. KOnveksi paksa pada ujung elemen

Konveksi paksa dari ujung bebas elemen diperoleh dari penerapan Persamaan. (4.41) dengan fungsi bentuk sekarang dievaluasi pada ujung kanan (dimana konveksi terjadi) dan dengan  $S_3$  (permukaan di mana konveksi terjadi) sekarang sama dengan luas penampang A dari batang. Oleh karena itu,

$$\{f\}_{h \ end} = \int_{\infty} A \begin{matrix} N_1(\hat{x}=L) \\ N_2(\hat{x}=L) \end{matrix} \} = hT \begin{matrix} A & 0 \\ \infty & 1 \end{matrix} \dots\dots\dots (4.43)$$

Menggambarkan kekuatan konvektif dari ujung lampu dari elemen di mana  $N_1(\hat{x}=L)$  mewakili  $N_1$  dievaluasi pada  $\hat{x}=L$  dan seterusnya.

**5. Langkah 5 menggabungkan persamaan elemen untuk mendapatkan persamaan global dan memasukkan kondisi batas.**

Kami memperoleh matriks konduksi struktur global atau total menggunakan prosedur yang sama seperti untuk masalah struktural (disebut metode kekakuan); itu adalah

$$[K] = \sum_{e=1}^N [K^{(e)}] \dots\dots\dots (4.44)$$

Biasanya dalam satuan kW / °C atau Btu (h-°F). Matriks kekuatan global adalah jumlah dari semua sumber panas elemen dan diberikan oleh

$$\{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \dots\dots\dots (4.45)$$

Biasanya dalam satuan kW atau Btu. Persamaan global kemudian

$$\{F\} = [K]\{t\} \dots\dots\dots (4.46)$$

Dengan kondisi batas suhu nodal yang ditentukan diberikan oleh Persamaan. ( ).

Perhatikan bahwa kondisi batas pada fluks panas, Persamaan. (  $q_x^* = -K_{xx} \frac{dT}{dx} = \text{constant}$  on  $S_2$  ), dan konveksi, Persamaan. (

) sebenarnya dicatat dengan cara yang sama seperti pemuatan terdistribusi diperhitungkan dalam masalah analisis tekan; yaitu, mereka termasuk dalam kolom matriks kekuatan melalui pendekatan yang konsisten (menggunakan fungsi bentuk yang sama yang digunakan untuk

menurunkan [K]), seperti yang diberikan oleh Persamaan. (  $N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L}$   $N_2 = \frac{\hat{x}}{L}$  ).

Masalah perpindahan panas yang di setuju untuk solusi dengan metode elemen hingga. Prosedur yang digunakan untuk solusi mirip dengan penyelesaian untuk masalah analisis tekan. Pada bagian 13.5, kita akan menurunkan persamaan khusus yang digunakan untuk menyelesaikan masalah transfer panas dua dimensi.

### 6. Langkah 6 Memecahkan untuk Temperatur Nodal

Kami sekarang memecahkan untuk suhu nodal global, {t}, di mana kondisi batas suhu nodal yang tepat Persamaan. (  $T = T_B$  on  $S_1$  ), ditentukan.

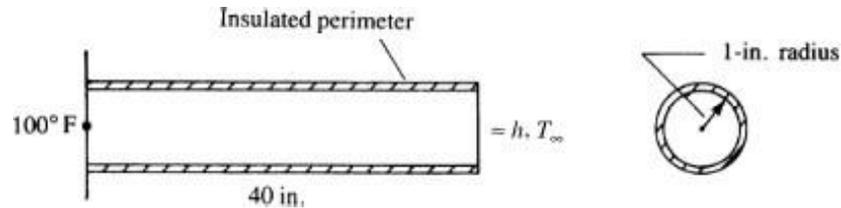
### 7. Langkah 7 Memecahkan untuk Gradien Suhu Elemen dan Heat Fluxes

Akhirnya, kami menghitung gradien suhu elemen dari Persamaan. (4.21), dan fluks panas, biasanya dari Persamaan. (4.23). Untuk mengilustrasikan penggunaan persamaan yang dikembangkan di bagian ini, kita sekarang akan menyelesaikan beberapa masalah transfer panas satu dimensi.

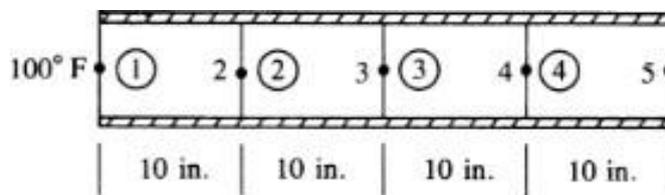
#### 4.6. Contoh Soal

Tentukan suhu ditribusi sepanjang batang ditunjukkan pada Gambar 4.8 dengan perimeter terisolasi. Suhu di ujung kiri adalah konstan 100 °F dan suhu

free-stream adalah 10 °F. Biarkan  $h = 10\text{Btu}/(\text{h} - \text{ft}^2\text{°F})$  dan  $K_{xx} = 20\text{Btu}/(\text{h} - \text{ft}^2\text{°F})$ . Nilai  $h$  khas untuk konveksi udara paksa dan nilai  $K_{xx}$  adalah konduktivitas yang khas untuk baja karbon (Tabel 4.2 dan 4.3).



Gambar 4.8. Satu-Dimensi batang dikenakan variasi temperatur



Gambar 4.9. Batang yang didiskritisasi elemen hingga

Diskritisasi elemen hingga ditunjukkan pada Gambar 4.9. Demi kesederhanaan, kami akan menggunakan empat elemen, masing-masing 10 in. Panjang. Akan ada kehilangan panas konvektif hanya di atas ujung kanan batang karena kita menganggap ujung kiri memiliki suhu yang diketahui dan kelilingnya harus diisolasi. Kami menghitung matriks kekakuan untuk setiap elemen sebagai berikut:

$$\frac{AK_{xx}}{L} = \frac{\pi(1 \text{ in.})^2[20 \text{ Btu}/(\text{h} - \text{ft} - \text{°F})](1\text{ft}^2)}{10 \text{ in}}$$

$$(\text{in}^2)12 \text{ in./ft} \quad * (144)$$

$$= 0,5236 \text{ Btu}/(\text{h} - \text{°F})$$

$$hPL = \frac{[10 \text{ Btu}/(\text{h}-\text{ft}-\text{°F})(2\pi)]}{6} \left( \frac{1 \text{ in}}{12 \text{ in./ft}} \right) \left( \frac{10 \text{ in}}{12 \text{ in./ft}} \right) \quad (4.47)$$

$$= 0,7272 \text{ Btu}/(\text{h} - \text{°F})$$

$$hT \frac{PL}{\infty} = \frac{1 \text{ in}}{10 \text{ Btu}/(\text{h} - \text{ft} - \text{°F})} \frac{(10 \text{°F})(2\pi)]}{12 \text{ in./ft}} \left( \frac{10 \text{ in}}{12 \text{ in./ft}} \right) *$$

$$= 43.63 \text{ Btu}/\text{h}$$

secara umum dari Persamaan. (4.38) dan (4.43), kita dapatkan

$$[k] = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iint h[N]^T [N] dS \quad (4.48)$$

Substitusi persamaan. (4.49) ke persamaan (4.50) untuk elemen 1, kita dapatkan

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.5236 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{Btu}/(h - ^\circ\text{F}) \quad (4.49)$$

Dimana kedua dan ketiga syarat untuk disisi dari persamaan (4.50) adalah nol karena itu tidak syarat konveksi terkait dengan elemen 1, demikian pula elemen 2 dan 3, kita dapatkan

$$[K^{(2)}] = [K^{(3)}] = [K^{(1)}] \quad (4.50)$$

Namun, elemen 4 mempunyai tambahan syarat (konveksi) karena untuk *heat loss* dari permukaan plat pada ujung kanan. Oleh karena itu menggunakan persamaan (4.43) kita dapatkan:

$$[K^{(4)}] = [K^{(1)}] + hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = 0.5236 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + [10 \text{ Btu}/(h\text{-ft} - ^\circ\text{F})] \pi \left( \frac{2 \text{ in.}}{12 \text{ in./ft}} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.5236 & -0.5236 \\ -0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix} + \text{Btu}/(h - ^\circ\text{F}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Secara umum, kita akan menggunakan persamaan (4.31)-(4.33), dan (4.37) untuk mendapatkan kekuatan matriks. Namun, dalam contoh ini,  $Q = 0$  (tidak ada sumber panas),  $q^* = 0$  (tidak ada aliran), dan tidak ada konveksi kecuali dariujung kanan, oleh karena itu

$$\{f^{(1)}\} = \{f^{(2)}\} = \{f^{(3)}\} = 0 \quad (4.52)$$

dan  $\{f^{(4)}\}_1 = hT_\infty A \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix}$

$$= 10 \text{ Btu}/(h - \text{ft}^2 - ^\circ\text{F}) \pi \left( \frac{2 \text{ in.}}{12 \text{ in./ft}} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} \\ = 2.182 \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} \text{ Btu}/h \quad (4.53)$$



$$t_2 = 85.93^\circ\text{F}$$

$$t_3 = 71.87^\circ\text{F}$$

$$t_4 = 57.81^\circ\text{F}$$

$$t_5 = 43.75^\circ\text{F}$$

Untuk masalah dasar ini, solusi bentuk tertutup dari persamaan diferensial untuk konduksi, eq. (4.9) dengan kondisi batas kiri-akhirnya dan kondisi batas kanan yang diberikan oleh persamaan (4.16) menghasilkan distribusi temperatur linier melalui panjang batang. evaluasi fungsi temperatur linier ini pada 10-in. Interval (sesuai dengan titik nodal yang digunakan dalam model elemen hingga) menghasilkan suhu yang sama seperti yang diperoleh dalam example dengan metode elemen hingga. karena fungsi temperatur diasumsikan linier dalam setiap elemen hingga, perbandingan ini seperti yang diharapkan. perhatikan bahwa F1 dapat ditentukan oleh persamaan (4.54).

## DAFTAR PUSTAKA

Kosasih, PB. 2012. *Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Andi, Yogyakarta.

Logan, DL. 2007. *A first Course in the finite element method 4<sup>th</sup> edition*.

Thomson, University of Wisconsin-plateville.

Supranto, J. 2014. *Pengantar Matrix*. Rineka Cipta. Jakarta

## DAFTAR ISI



# **BABI**

